

P3 – LOI EXPONENTIELLE

TI-82 Stats – TI-83 Plus – TI-84 Plus

Mots-clés : loi exponentielle, simulation.

1. Objectifs

- Calculer à partir de la loi exponentielle.
- Simuler avec la calculatrice un échantillon de réalisations d'une variable aléatoire de loi exponentielle.
- Comparer l'histogramme des fréquences et la courbe de la densité de probabilité d'une loi exponentielle.

2. Mise en œuvre

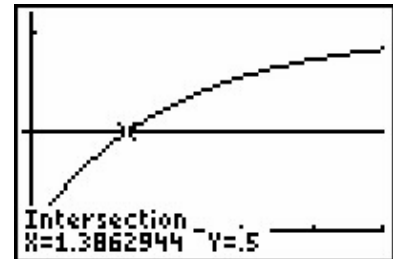
1) Si $x < 0$, $F(x) = 0$ et $f(x) = 0$;

$$\text{si } x \in [0 ; +\infty[, F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{2}x} \text{ et } f(x) = F'(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} .$$

2) a) La demi-vie est $2 \ln 2 \approx 1,386$ soit 1 minute et 23 secondes à la seconde près. La Belle au Bois Dormant a autant de chance de se piquer avant la demi-vie qu'après.

b) La médiane est l'abscisse du point d'intersection de la droite d'équation $y = 0,5$ et de la courbe de F (écran 1).

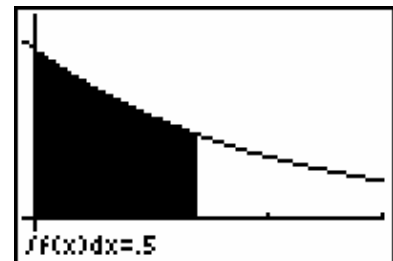
Ce point s'obtient par : 2nd [CALC] 5 : intersection.



écran 1

c) On vérifie en calculant l'intégrale : $\int_0^{2 \ln 2} f(x) dx$ (écran 2).

Ce calcul s'effectue avec : 2nd [CALC] 7 : $\int f(x) dx$.

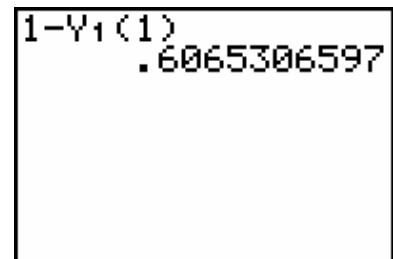


écran 2

3) a) $P(T > 1) = 1 - F(1) = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,607$.

b) Si F a été saisie dans Y_1 , $P(T > 1) = 1 - Y_1(1)$ (écran 3).

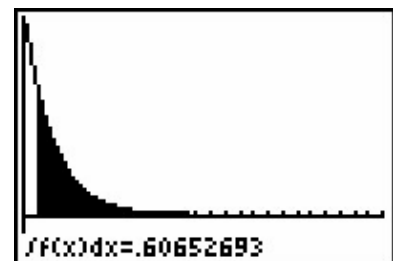
Y_1 est accessible par VARS puis Y-VARS 1 : Fonction.



écran 3

Avec la densité f , il faut encore calculer une intégrale : $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

La calculatrice n'accepte pas la borne infinie, mais la convergence de f vers 0 quand x tend l'infini étant rapide, on obtient un résultat acceptable en prenant comme borne supérieure pour l'intégrale le nombre 25 par exemple (écran 4).



écran 4

4) a) Si $x \in]0 ; 1]$, $-2 \ln x \in [0 ; +\infty[$ donc X est à valeurs dans $[0 ; +\infty[$.

Pour tout $t \in [0 ; +\infty[$,

$$P(T' \leq t) = P(-2 \ln X \leq t) = P(\ln X \geq -\frac{1}{2}t) = P(X \geq e^{-\frac{1}{2}t}) = 1 - P(X < e^{-\frac{1}{2}t}) = 1 - e^{-\frac{1}{2}t} = F(t).$$

T suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$.

b) Une suite de 100 nombres $-2\ln(\text{NbrAléat})$ simule un échantillon de 100 réalisations d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$ (écran 5).

```
suite(-2ln(NbrAléat),X,1,100)→L1
(.3450895164 3...
```

écran 5

c) Commencer par saisir les bornes des classes dans la liste L2 (écran 6).

Saisir les fréquences de chaque classe dans la liste L3 (écran 7).

Remarque : les guillemets permettent d'attacher une formule à une liste. Lorsque L1 varie, L3 est ainsi mise à jour.

Configurer le graphique statistique (écran 8).

```
suite(X,X,0,9)→L2
```

écran 6

```
"suite(somme((L1
≤X+1)-somme(L1<X
))/100,X,0,9,1)"
→L3
```

écran 7

```
Graph1 Graph2 Graph3
Type: L1 NAff
ListeX:L2
Effectifs:L3
```

écran 8

Régler la fenêtre (écran 9).

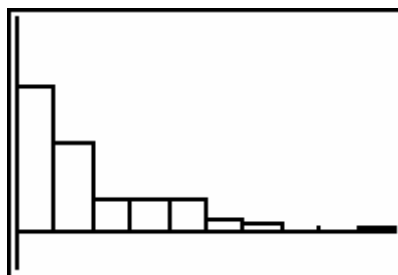
L'histogramme s'obtient par GRAPH (écran 10).

d) Saisir l'expression de f dans Y_1 ($Y=$).

La touche GRAPH permet de superposer les deux graphiques (écran 11).

```
FENETRE
Xmin=0
Xmax=10
Xgrad=1
Ymin=-.1
Ymax=.6
Ygrad=1
Xres=1
```

écran 9



écran 10



écran 11

Remarque :

l'historique (2nd ENTRY) permet de remonter dans les instructions de l'écran de calcul et ainsi d'obtenir un nouvel échantillon et l'histogramme correspondant (écran 12).



écran 12

Nom :

Classe :

P3 – LOI EXPONENTIELLE

La Belle au Bois dormant est assise devant sa cheminée, sa quenouille à la main. L'intervalle de temps T (en minutes) qui sépare l'instant où elle a pris place pour filer la laine et celui où elle va se piquer suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$.

- 1) Préciser la fonction de répartition F de T ainsi que sa densité de probabilité f .
- 2) **a)** Déterminer, par le calcul, à la seconde près, la demi-vie de la variable continue T (médiane de T). Interpréter le résultat.
b) Vérifier le résultat précédent à partir de la représentation graphique de F , obtenue sur la calculatrice.
c) Répondre à la même question qu'en **b)** à partir de la représentation graphique de f .
- 3) **a)** Déterminer par le calcul $P(T > 1)$.
b) Vérifier le résultat précédent avec la calculatrice en utilisant la fonction F puis la fonction f .
- 4) **Simulation de la loi de T**
a) X est une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0 ; 1]$ et T' est la variable aléatoire définie par : $T' = -2 \ln X$. Montrer que les valeurs prises par T' appartiennent à $[0 ; +\infty[$, déterminer la fonction de répartition de T' et préciser la loi de T' .
b) Dédire de la question précédente la simulation, avec la calculatrice, d'une série de 100 réalisations de T . Stocker cet échantillon dans la liste L1.
c) Tracer sur la calculatrice l'histogramme des fréquences des 100 réalisations précédentes en considérant 10 classes d'amplitude 1.
d) Tracer sur le graphique précédent la courbe de la densité de probabilité f de T .