TI-Nspire™ CAS

Software version 3.1

— introduktion og eksempler

TI-Nspire™ CAS
— introduktion og eksempler

Filen kan fås på www.education.ti.com/danmark eller ved henvendelse til Texas Instruments på tlf.: 38 18 19 56 eller email: ti-cares@ti.com.

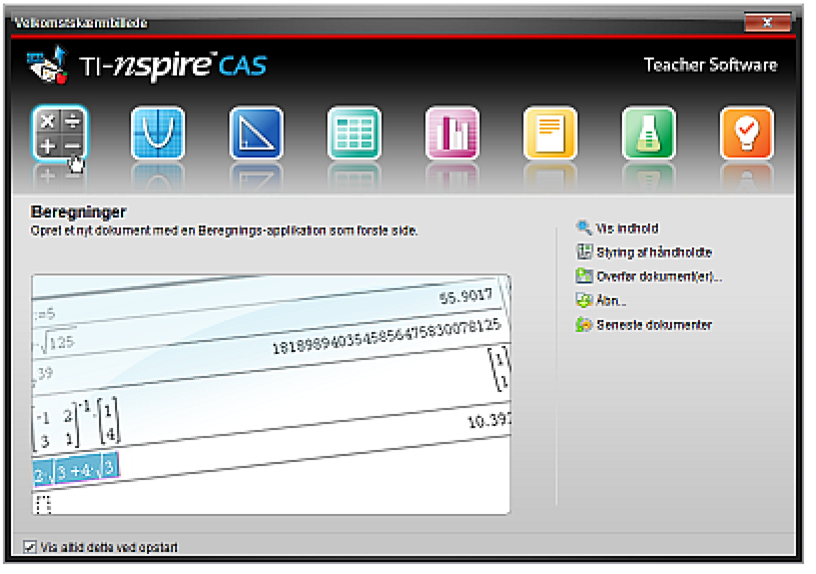
Indhold

Start TI-Nspire CAS

Obs
Programmet findes i to versioner 'TI-Nspire' og 'TI-Nspire CAS'. Det er meget vigtigt, at det er CAS versionen, du har, hvis du vil følge denne guide.

ved at dobbeltklikke på genvejen på Skrivebordet eller ved at vælge Programmer ▸ TI-Tools ▸ TI-nSpire CAS ▸ TI-nSpire CAS (hvis du har valgt standard installationen). Det skærmbillede, du får frem, kan se forskelligt ud afhængig af, hvordan indstillingerne var sidst programmet blev benyttet.

Når du starter version 3.1 første gang, vil du få dette Lynstartsvindue frem

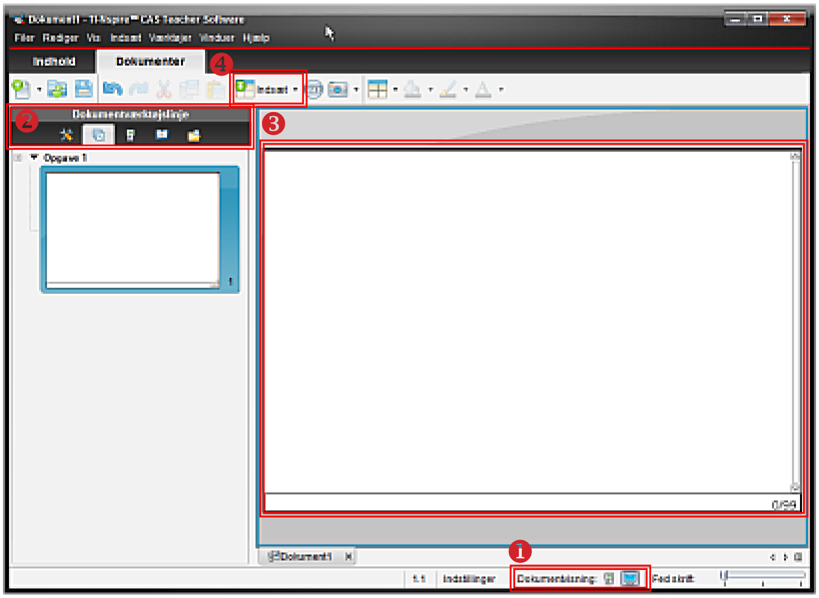


Obs
Er dit Lynstarts-vindue slået fra, kan du slå det til igen ved at vælge menu-punktet
Hjælp ▸ Velkomstbillede...

Herfra har du direkte adgang til flere værksteder: Beregninger, Grafer, Geometri samt Lister og Regneark, Diagrammer og statistik samt Noter. Før musen hen over ikonerne øverst i skærmbilledet, og læs den information, der kommer frem.
Du kan oprette et nyt dokument herfra ved at klikke på en af ikonerne, og du kan åbne et eksisterende dokument ved at klikke på Åbn.. linket til højre i skærmbilledet.

Ser du ikke dette lynstartsvindue, kan det være fordi, du eller en anden har fjernet fluebenet nederst til venstre ved 'Vis altid dette ved opstart'.

Har du dette vindue, så klik på **Beregninger** ikonen, og du vil få et skærmbillede som det, du ser her



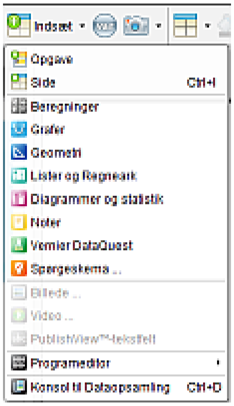
Mangler du noget i forhold til skærmbilledet ovenfor, så kan du genskabe standard-indstillingerne ved at foretage menuvalget **Vinduer ▸ Nulstil layout af arbejdsområde**.

Selvom du har nulstillet layout af arbejdsområdet, kan dit arbejdsområde (ruden til højre) godt se anderledes ud. Dette ændrer du ved at klikke på skærm ikonen ❶ i Dokumentvisning.

Hvis du ikke får vist miniaturer i panelet til højre, så skal du klikke på det andet ikon i Dokumentsværktøjslinjen ❷.

I lynstartsmenuen valgte vi at starte i værkstedet til Beregninger. Her får en blank skærm frem klar til indtastning ❸.

Hvis du vil tage et kig i de andre værksteder, så indsætter du dem ved at trykke på **Indsæt** knappen ❹:

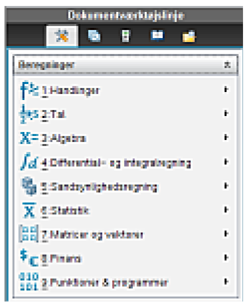


Indsæt fx et Graf-værksted ved at vælge Grafer i Indsæt-menuen. Straks ser du, at dit arbejdsområde er et koordinatsystem, og i det venstre sidepanel er der tilføjet en miniature. Du har tilføjet en *side* til din *opgave*.
Indsæt også et Geometri-værksted ved at vælge Geometri i Indsæt-menuen. Læg mærke til, hvordan arbejdsområdet og sidepanelet ændres.

Ved at klikke i en af miniaturerne, kan du gå til ethvert af de værksteder, du har tilføjet.
Ved at vælge det første menupunkt i Indsæt-menuen, får du indsat en ny opgave i dit dokument. Denne opgave kan så tilføjes nye værkseder. Osv.

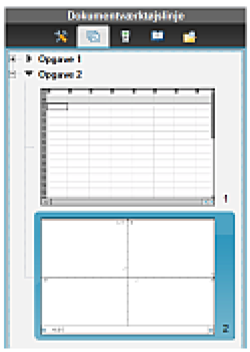
I Dokumentsværktøjslinjen ❷ er der en række faneblade, hvor du vælger, hvad du vil vise i det venstre sidepanel:

Klik på fanebladene et efter et, så du kan se, hvad der gemmer sig under de enkelte faner:



Dokumentværktøjer

- er en række værktøjsmenuer - her til brug i Beregninger. Når du skifter værksted, vil dette panel indeholde de relevante værktøjer for det aktuelle værksted.
Skift mellem de værksteder, du har tilføjet, og se, hvordan de tilgængelige værktøjer ændres.



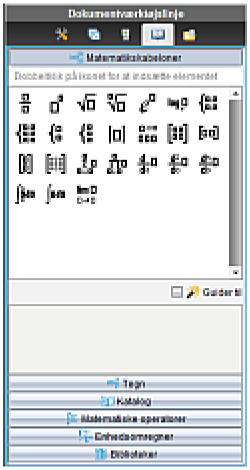
Sidesorterer

- er en række miniaturer, der gør det nemt at finde rundt i en opgave med flere sider.
Rækkefølgen af siderne kan ændres ved at trække sider til den ønskede placering.

TI - Smartview (Kun i lærersoftwaren)

- er en softwareudgave af TI-Nspire CAS håndholdt. Her kan du med musen trykke på tasterne på billedet af den håndholdte og få vist det, der vil stå i den håndholdtes display, i ruden til højre.

Du kan endda få vist arbejdsområdet som skærmen på en TI-Nspire CAS håndholdt ved at klikke på regner ikonen i ❶. Prøv!



Hjælpeprogrammer

- indeholder bl.a. en tabel med matematiske tegn, græske bogstaver mm., skabeloner til opskrivning af matematiske udtryk samt et katalog over alle funktioner og et katalog over alle operatorer i TI-Nspire CAS.

Den sidste knap — **Mine Filer** — indeholder to browser vinduer: Et til din PC og et til en tilkoblet håndholdt. Her kan du åbne dine gemte dokumenter og overføre dokumenter fra den håndholdte til din PC — og omvendt.

Du kan skjule sidepanelet ved at vælge menupunktet Vinduer ▸ Skjul automatisk Dokumentværktøjslinjen, og en fane bliver lodret placeret i venstre side.
Du aktiverer denne fane ved at placere markøren over den, og værktøjsmenuen popper ud fra venstre side. Prøv!

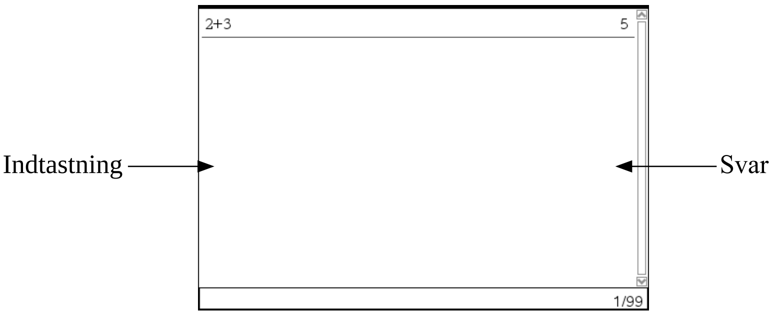
1 Beregninger

For at få TI-Nspire CAS softwaren til at lave noget fornuftigt så hurtigt som muligt, vil kun de absolut nødvendige dele af Beregninger blive omtalt her. I de følgende afsnit kommer turen til de andre værksteder.

Den første lille opgave

Indtast 2 + 3 og afslut med Enter. Resultatet er selvfølgelig ikke særlig interessant, men tag et kig på skærmbilledet:

Obs
Bundlinjen er ændret en smule: Yderst til højre står der nu 1/99. Det betyder, at der er 1 indtastnings/svarpar i historikområdet ud af de 99, standard-opsætningen giver plads til.



Indtastning af et taludtryk

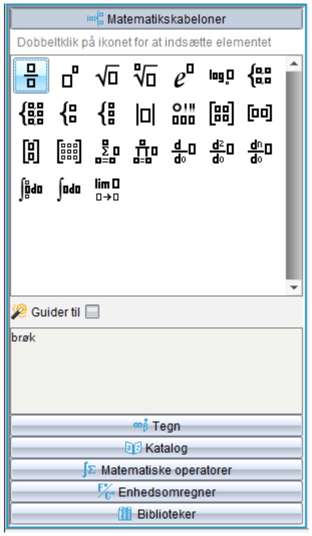
Udregn udtrykket

$$-3.17 + \frac{2.53^2 - \sqrt{5.25}}{2.46}$$

Når du indtaster fortegnet, popper en liste op, hvor du (her) skal vælge (-) Negere:

Der indgår en brøkstreg i udtrykket. Dette afstedkommer ofte brug af parenteser, men på TI-Nspire CAS kan du undgå dette ved at bruge skabeloner:

Tryk på fanen Hjælpeprogrammer i sidepanelet og vælg her Matematikskabeloner

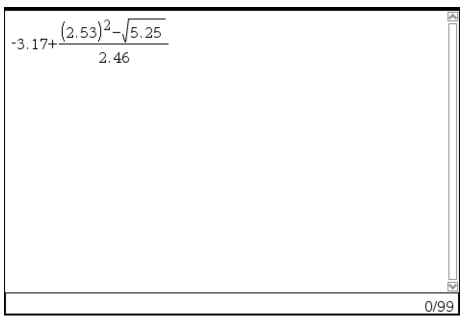


Indsæt brøkskabelonen ved at dobbeltklikke med musen. Herefter skulle du gerne have dette på din skærm:

$$-3.17+\frac{\square}{\square}$$

Indtast tælleren — kvadrat og kvadratrodstegnet findes der også skabeloner til. Når tælleren er indtastet, flytter du til nævneren med ↓ - tasten, og indtaster denne. Nedenfor ser du skærmbilledet med udtrykket korrekt indtastet:

Tip
Du kan hurtigere lave potensopløftning med ^ - tasten på dit tastatur.
Efter indtastning af eksponenten kommer du tilbage til basislinjen ved at taste →



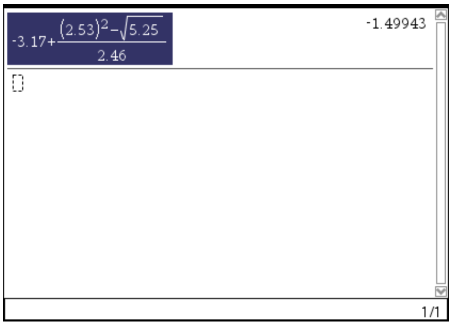
Skulle du lave en fejl undervejs, *før* du taster Enter, kan du

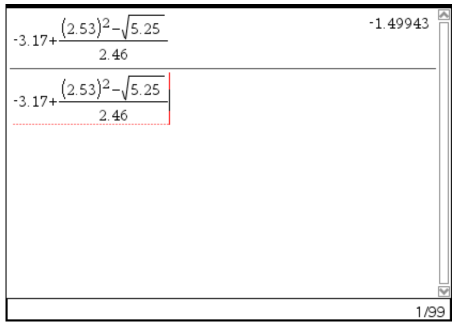
- vha. piletasterne pile hen til den eller de fejl, du måtte have lavet
- slette et enkelt tegn ved at placere markøren før det tegn, der skal slettes, og taste **DEL**
- indsætte et eller flere tegn på markørens position ved blot at skrive på det pågældende sted

Tip
Du også kopiere ved at markere med musen, og benytte Ctrl+C for at kopiere og Ctrl+V for at indsætte.

Opdager du en fejl, efter at du har tastet Enter, kan du hente udtrykket ved at pile op til det (tast to gange ↑), hvorved det markeres i blåt.
Når du har det, du vil hente, markeret, taster du Enter, hvorefter udtrykkes hentes ned til indtastningslinjen, så du kan rette fejlen og få udtrykket genberegnet — se nedenstående to skærmbilleder:

Tip
Du kan også med musen markere, det du vil kopiere, og trække det til indtastningslinjen.



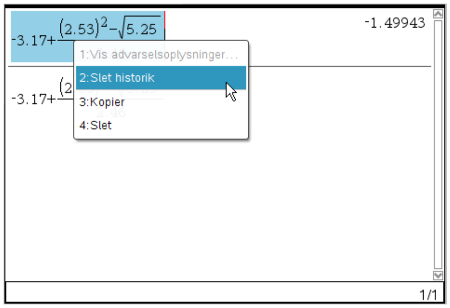


Ryd op

Tip
I stedet for at rydde op kan du indsætte et nyt værksted med Ctrl+I eller oprette et nyt dokument med Ctrl+N.

Selvom det endnu er til at overse, kan du lige så godt lære at rydde op efter dig i historikområdet. Pil op til den linje (tast ↑) du vil slette

- Slet linjen med DEL eller BackSpace.
- Hele historikområdet sletter du ved at højre-klikke i historikområdet, og vælge Slet historik:



Hvis du fortryder, at du har slettet hele historikken eller en anden handling, så findes der en fortrydknap — eller du kan taste Ctrl+Z.

Brøkregning — regning med eksakte tal

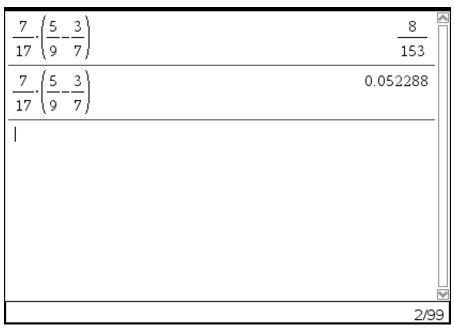
TI-Nspire CAS regner naturligvis eksakt med brøker af hele tal, hvor slutresultatet altid forkortes i bund.

Tip
Genvejstasten for division er /

Beregn udtrykket $\frac{7}{17} \cdot \left(\frac{5}{9} - \frac{3}{7}\right)$

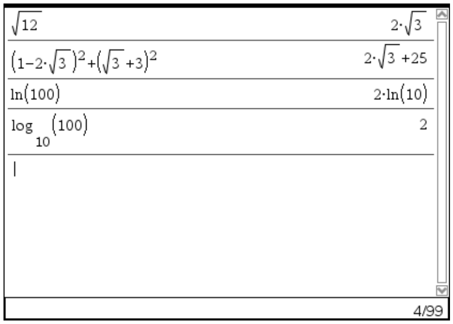
Indtast med flittig brug af brøkskabelonen:

Obs
Eksakt beregning er kun mulig, hvis der udelukkende indgår eksakte tal i udtrykket.
Findes der blot et enkelt decimaltal i udtrykket, bliver resultat et decimaltal.



I første linje er indtastningen afsluttet med Enter, og resultatet vises som uforkortelig brøk. I anden linje er indtastningen afsluttet med Ctrl+Enter — dette giver en tilnærmet værdi.

Det er ikke kun rationale tal, der behandles eksakt. Det samme gælder for irrationale tal, der så vidt det er muligt pr. automatik omskrives til et standardformat. Nedenfor ser du nogle eksempler på dette:



Regning med bogstaver

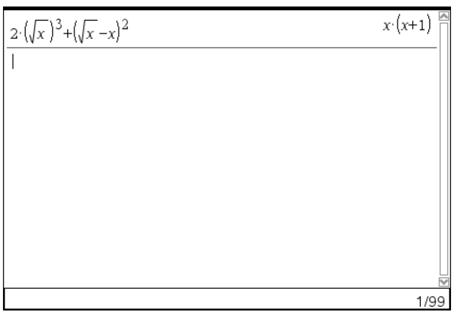
Reducer udtrykket $2(\sqrt{x})^3 + (\sqrt{x} + x)$

Tip
Potenser skrives vha. ^ - tasten.

Opret en ny opgave ved at klikke på og tilføj et Beregningsværksted. Hold godt øje med markøren mens du taster. Undervejs skal du bruge → til at slippe ud af kvadratrødder, potenser og parenteser. Læg mærke til, at du kun behøver at sætte venstreparenteser — højreparenteser sættes automatisk.

Det eneste, du skal foretage dig for at få udtrykket reduceret, som vist, er at trykke på Enter, TI-Nspire CAS vil pr. automatik søge at reducere udtrykket mest muligt:

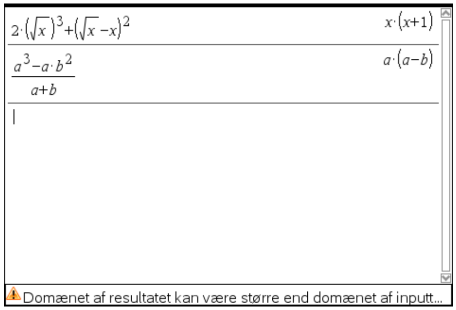
Tip
Advarslen i bundlinjen betyder, at resultatet kan være defineret i et større talområde end det oprindelige udtryk. I det oprindelige udtryk skal forudsættes, at $x \geq 0$. Dette er ikke nødvendigt i resultatet



Reducer udtrykket $\dfrac{a^3 - a \cdot b^2}{a + b}$

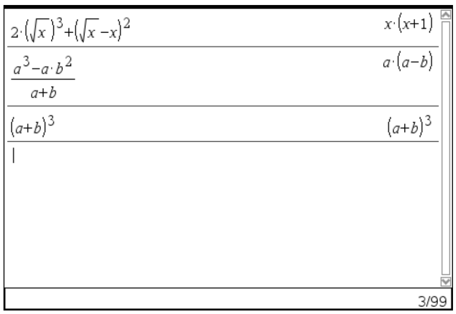
Du behøver blot at taste udtrykket ind — reduktionen sker igen automatisk:

Tip
Advarslen i bundlinjen betyder her, at i det oprindelige udtryk skal forudsættes $a + b \neq 0$. Dette er ikke nødvendigt i resultatet.



Når TI-Nspire CAS altid reducerer et udtryk mest muligt, hvad gør du så, hvis du vil have udregnet fx $(a + b)^3$?

Indtast $(a + b)^3$ og tast Enter. Der sker intet med udtrykket:



Tip
3-tallet foran Algebra viser, at genvejen til Algebra menuen er Alt+3. Tilsvarende for Udvid.

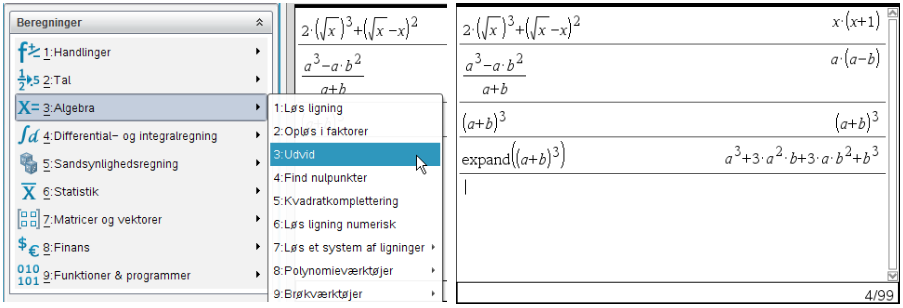
— men det er der råd for:

I sidepanelet skifter du til Dokumentværktøjer og vælger X= 3:Algebra ▸ 3:Udvid, og **expand()** indsættes i indtastningslinjen med markøren placeret i parentesen klar til indtastning

Obs
Selvom du vælger Udvid i menuen er det expand( ) der indsættes.

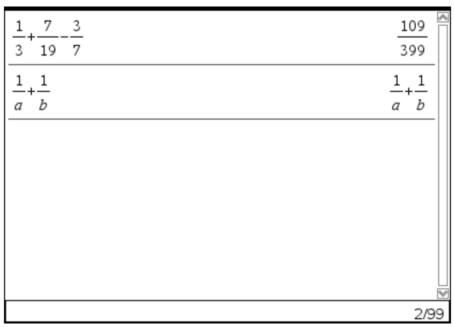
Pil op og hent $(a + b)^3$ i historikområdet, og tast Enter. Udtrykket omskrives herefter til ledform, dvs. parentesen udregnes og udtrykket skrives som en flerleddet størrelse:

Tip
Du kan også skrive expand(direkte fra tastaturet.



Om at sætte på fælles brøkstreg

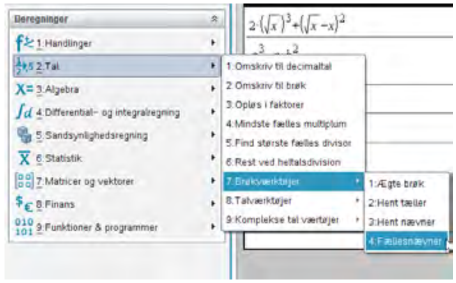
Som du tidligere har set, sættes talbrøker pr. automatik på fælles brøkstreg. Det samme gælder ikke summer og differenser af symbolske brøker:

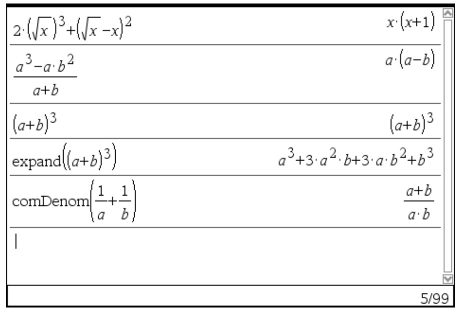


Obs
ComDenom er en forkortelse af Common Denominator, som betyder "fælles nævner".

Hertil skal du bruge kommandoen ComDenom:

Vælg i Dokumentværktøjer 2:Tal ▸ Brøkværktøjer ▸ Fællesnævner





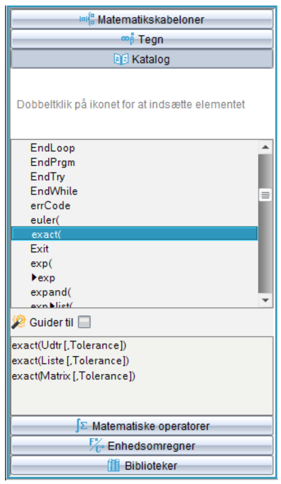
Katalog

Obs
Drejer det sig blot om at konvertere et resultat, kan menupunktet ▸ **Omskriv til brøk** benyttes i stedet for **exact**.

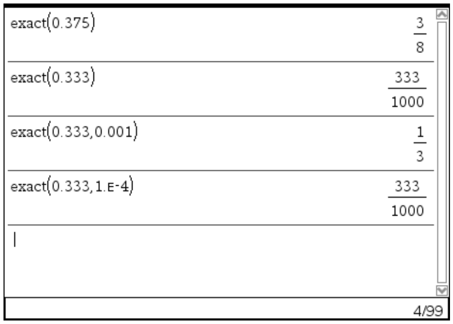
Der findes en kommando med navnet **exact**, der omsætter et decimaltal til brøk. exact findes ikke i nogen af menuerne, så den må du finde andetsteds — eller naturligvis blot skrive det.

Du kan finde den i den alfabetisk ordnede fortegnelse over alle instruktioner i Katalog: Klik på knappen Hjælpeprogrammer i sidepanelet og klik her på fanen Katalog

Tip
Syntaksen for **exact** står i feltet for neden.
exact skal som argument dels have et udtryk, og dels en valgfri tolerance, der skal adskilles med et komma.



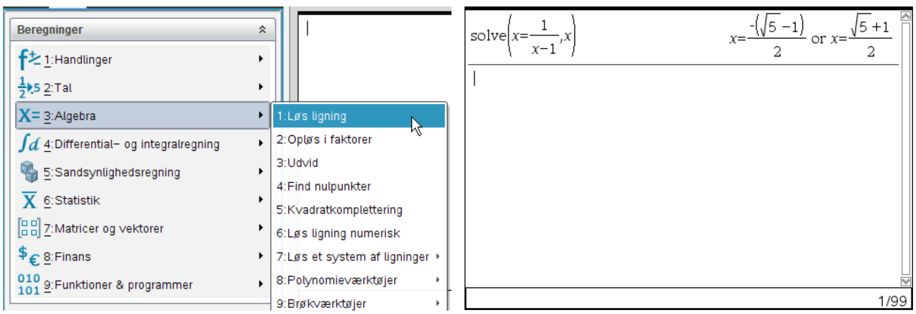
Med piletasterne samt PgUp-, PdDn-, Home- og End-tasterne kan du bladre i listen. Taster du **e** vil du hoppe til starten af de kommandoer, der starter med E. Flyt markeringen til **exact(**, og tast Enter. **exact( )** kopieres da til indtastningslinjen. Nedenfor ser du et par eksempler på brugen af exact:



Ligninger og genbrug

Løs ligningen $x = \dfrac{1}{x-1}$

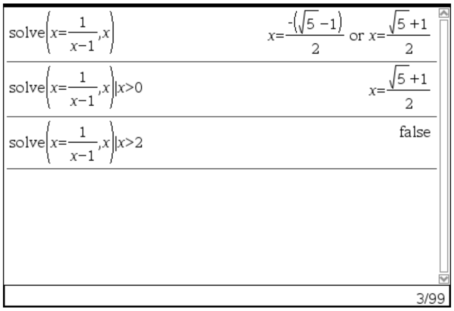
Vælg i Dokumentværktøjer X= 3:Algebra ▸ 1:Løs ligning, og **solve( )** bliver indsat på skærmen. Herefter indtaster du ligningen og fortæller, at ligningen skal løses med hensyn til x ved at skrive **,x** efter ligningen. Tast Enter, og ligningen løses:

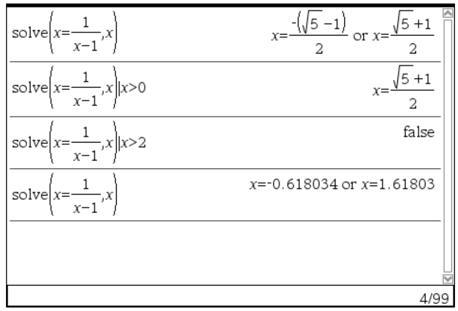


Hvis du kun er interesseret i fx den positive løsning, kan du begrænse løsningsintervallet til de positive reelle tal vha. betingelses-operatoren | (findes som tast på et PC tastatur).

I skærmbilledet ovenfor henter du den indtastede ligning og indsætter betingelsesoperatoren | efterfulgt af x > 0. Tast Enter, og ligningen løses endnu engang (midterste linje):

Tip
Numerisk løsning af ligninger kan også udføres ved at skrive **nSolve** i stedet for **solve**. **nSolve** findes i Algebra-menuen som Løs ligning numerisk





Tip
Skulle du rende ind i en ligning solve ikke kan klare, kan du bruge nSolve med et passende gæt (se side 82)

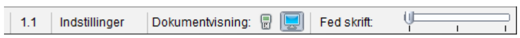
Laver du løsningsintervallet således, at der ingen løsninger er, svarer maskinen med **false** (nederste linje i venstre skærmbilledet ovenfor).

Er du ikke interesseret i de eksakte løsninger, men blot nogle tilnærmede, klares sagen med tastetrykket Ctrl+Enter (højre skærmbillede ovenfor)

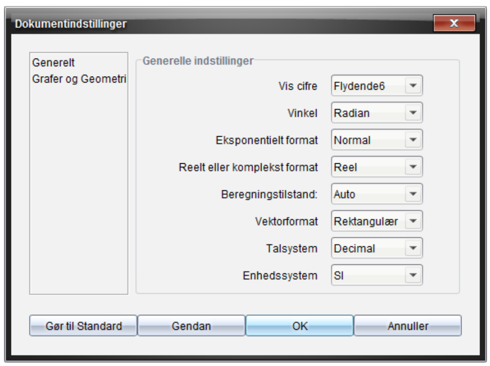
Antal decimaler

Obs
Det er her du skifter mellem indstilling i grader og radianer. Generelle indstillinger dækker alt bortset fra Grafer og Geometri, dvs. Beregninger, Noter, Lister og Regneark samt Diagrammer og statistik.

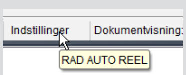
Hvis du vil have resultatet med flere eller færre decimaler end ovenfor, så skal du ændre indstillingerne ved at dobbeltklikke på Indstillinger i statuslinjen:



Dette bringer denne dialogboks frem



Tip
Hvis du holder markøren et øjeblik over Indstillinger, får du vist dine indstillinger



I listen **Vis cifre:** vælger du det antal decimaler du finder passende, og afslutter med Enter.

2 Grafer

I Grafværkstedet kan du tegne og undersøge mange forskellige former for grafer.

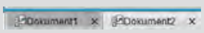
I starten benyttes følgende eksempel:

Tegn grafen for den lineære funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ og grafen for andengradspolynomiet $g(x) = x^2 - 2$.

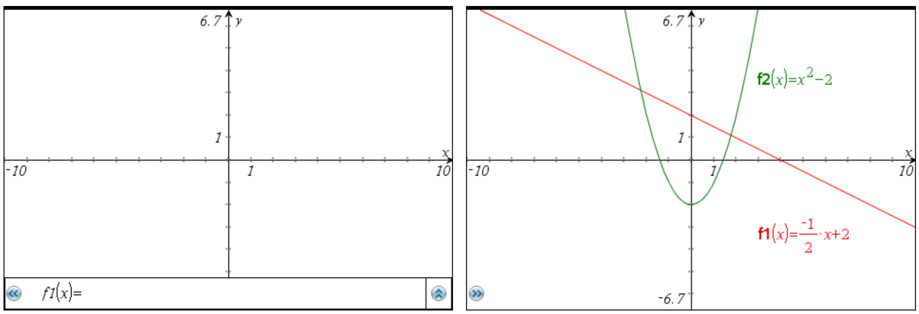
Bestem skæringspunkterne mellem linjen og parablen.

Tegn graferne

Obs
Når du opretter et nyt dokument er det gamle dokument stadig åbent, og vil du senere fortsætte med at arbejde heri, så klikker du blot i fanen for dokumentet under arbejdsområdet:



Opret et nyt dokument ved at klikke på — denne gang med et Grafværksted tilføjet. Herefter skulle din skærm gerne se sådan ud (venstre skærmbillede):

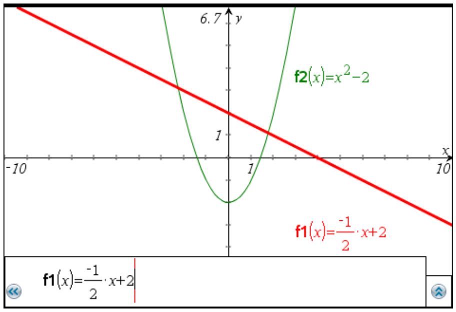


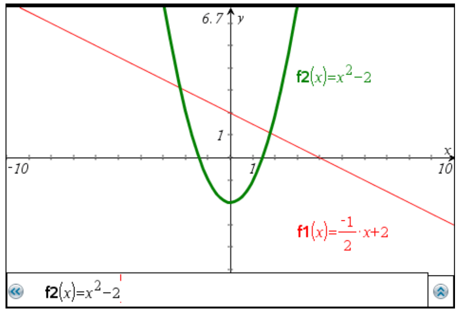
Indtastning af funktionerne sker i indtastningslinjen nederst på skærmen. Hvis du ikke allerede er nede i indtastningslinjen, så klik med musen i feltet eller åbn indtastningslinjen ved at taste TAB.

Når indtastningen af *f1(x)* afsluttes med Enter, tegnes grafen straks, og indtastningslinjen lukker. Du åbner indtastningslinjen igen ved at trykke på .
På skærmbilledet til højre ser du, hvordan det skal se ud, når begge forskrifter er indtastede. Så længe du er i indtastningsfeltet kan du med piletasterne bladre i de indtastede forskrifter,

og den aktive graf vil blive fremhævet og forskriften vist (Prøv!)

Tip
Du fjerner indtastningsfeltet ved at trykke «, og du får det frem igen med ». Crtl+G er genvejen.
Tasterne ESC og TAB kan også bruges.
Ved at trykke på knappen kan du få alle funktioner vist i en liste.





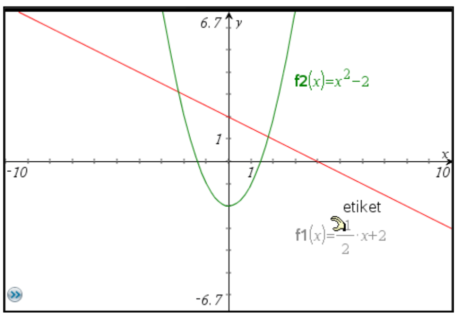
Forlad indtastningsfeltet ved at trykke på «. Herefter får du i graffeltet en aktiv markør, der kan optræde i flere forskellige former fx

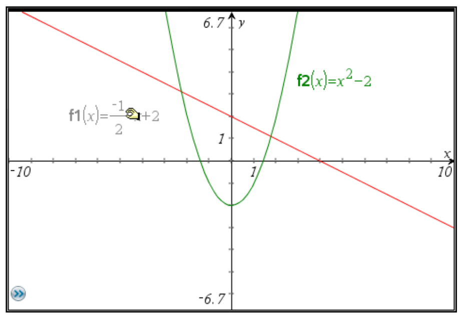
— og vise meddelelser og visuelle effekter alt efter, hvad markøren aktuelt peger på.

Hvis du fx vil have flyttet en etiket ved en grafen, så flytter du markøren hen til en etiketten, så pilen ændres til en åben hånd og teksten ‘etiket’ kommer til syne. Hold musen nede og træk med musen, så skifter hånden udseende og bliver til en gribende hånd.

Træk etiketten derhen, hvor du vil have den:

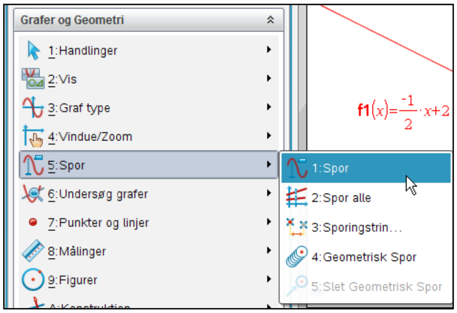
Tip
Du kan skjule eller fjerne en etiket ved at højre-klikke på etiketten og vælge Vis/Skjul eller Fjern i menuen. Hvis du slet ikke vil have vist etiketter, så kan du i Dokumentindstillinger under Grafer og Geometri fravælge disse.

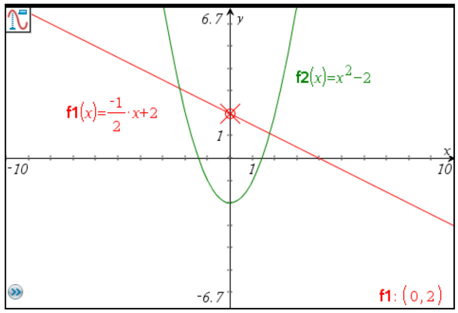




Grafsporing

I Dokumentværktøjer for Grafer vælger du  5:Spor ▸ 1:Spor:





Obs
Med sporing aktiveret kan du taste en *x*-værdi på tastaturet, og når du trykker Enter, så hopper du til det punkt, der har denne *x*-værdi (og du får samtidig *y*-værdien vist).

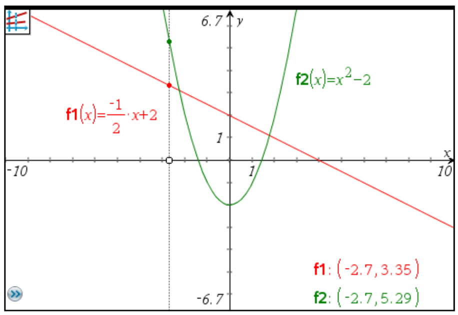
Obs
Læg mærke til, at du bliver gjort opmærksom på interessante punkter under sporingen.

Du kan flytte sigtekornet frem og tilbage på linjen vha. piletasterne og samtidig følge sigtekornets aktuelle koordinater på nederst på skærmen.
Med et tryk på PilOp (eller PilNed) kan du binde sigtekornet til parablen, og du kan nu flytte sigtekornet frem og tilbage på parablen vha. piletasterne.

Du kan spore begge grafer samtidig ved at vælge  5:Spor ▸ 2:Spor Alle. Her bindes sigtekornet til *x*-aksen, og du kan nu flytte sigtekornet frem og tilbage på *x*-aksen vha. piletasterne, og samtidig følge grafpunkternes aktuelle koordinater på skærmen.

Tip
Ikonet

i øverste venstre hjørne af skærmen viser, at Spor Alle er aktiveret.

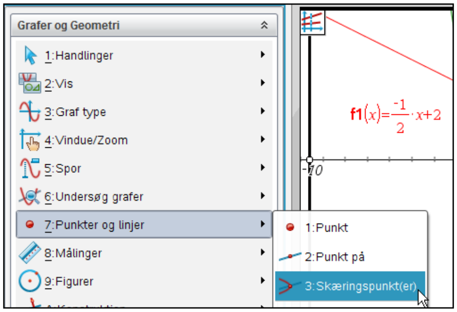


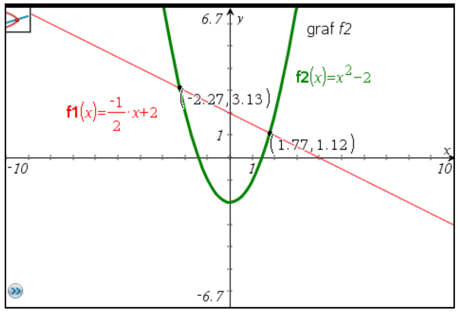
Med sporing kan du aflæse nogle tilnærmede koordinater for skæringspunkterne. Forlad sporing ved at trykke på ESC.

Skæring mellem grafer

Vælg i Dokumentværktøjer 7: Punkter og linjer ▸ 3:Skæringspunkt(er).

Flyt markøren hen til en af graferne. Når markøren ændrer udseende til en pegende hånd, klikker du på grafen. Den udpegede graf blinker nu. Udpeg den anden graf tilsvarende, og straks efter vises skæringspunkterne:

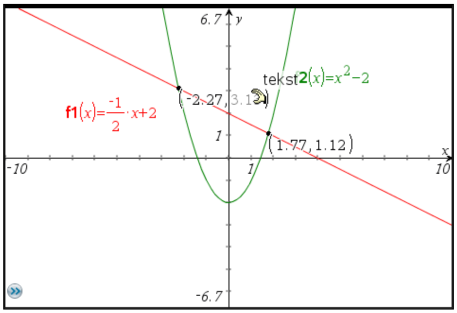


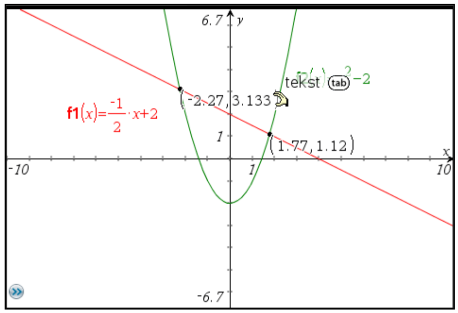


Skæringspunkterne kan vises — afhængig af maskinens indstilling — med 3 cifre.

Vil du ændre antallet af decimaler, så placerer du markøren over tallet, du vil ændre, og trykker + tasten for at få flere decimaler med, – tasten for at få færre. Du skal forlade det aktuelle værktøj ved at taste ESC inden du kan ændre antal decimaler. Nedenfor ændres antallet af decimaler på y-koordinaten 3.13 (fra 3.1 til 3.133):

Tip
Du kan nemt *trække* koordinaterne til en position, hvor de ikke ligger oven i grafen.





Når du er færdig, flytter du blot musen. Lav tilsvarende ændringer for de øvrige koordinater, og flyt dem om nødvendigt, så det hele står pænt.

Skæringspunkterne symbolsk

Før du kan lave symbolske beregninger, skal du have føjet et Beregningsværksted til dit dokument:

> **Tip**
> Ctrl+I bringer dig direkte til værkstedslisten.

Tryk på Indsæt, og vælg **Beregninger**.

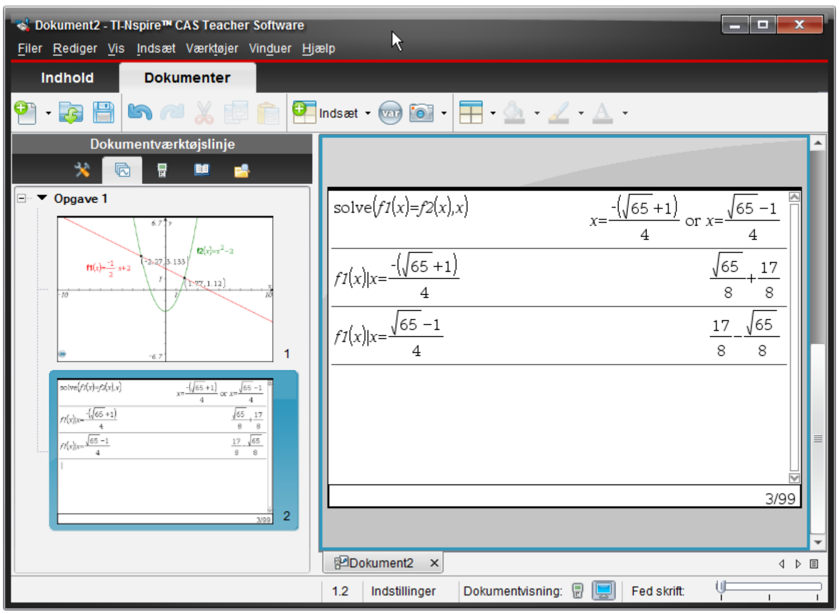
Hvis du har Sidesorterer vist i sidepanelet (ellers klik på knappen), kan du se, at der nu er to miniaturer til venstre på din skærm. Miniature 1 er dit Grafværksted, miniature 2 er det Beregningsværksted, du lige har tilføjet. Begge sider er en del af Opgave 1.

Idet de to funktioner er indtastet som hhv. *f1(x)* og *f2(x)* i Grafværkstedet, kan du bestemme skæringspunkterne symbolsk ved at indtaste *solve(f1(x)=f2(x),x)*. Dette giver dig de to skæringspunkters *x*-koordinater (venstre skærmbillede).

De tilhørende *y*-koordinater kan du finde ved at indsætte *x*-koordinaterne i en af forskrifterne én ad gangen:

Skriv *f1(x)*| i indtastningslinjen. Hent en af løsningerne i historikområdet, og beregn *y*-værdien. Tilsvarende med den anden løsning.

> **Tip:**
> Marker den del af løsning, du vil hente, og tast Enter
> - *eller*
> grib markeringen og træk det til indtastningslinjen
> - *eller*
> tryk Ctrl+C for at kopiere og Ctrl+V for at indsætte (højre-klik kan også bruges her).



Ny opgave og flere grafværktøjer

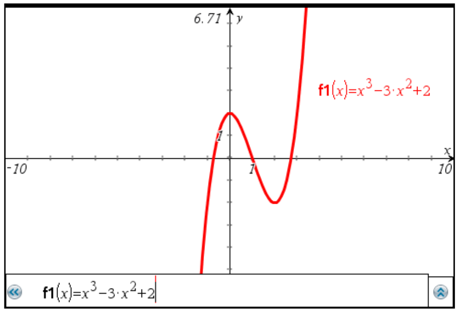
Tegn grafen for funktionen $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1) Bestem funktionsværdierne $p(3)$ og $p(7)$.

2) Bestem funktionens nulpunkter og lokale ekstremer.

Husk
Du opretter nemmest et nyt dokument ved at taste Ctrl+N og derefter vælge det værksted, du vil starte i.

Opret et nyt dokument med et Grafværksted og indskriv funktionen som *f1(x)*

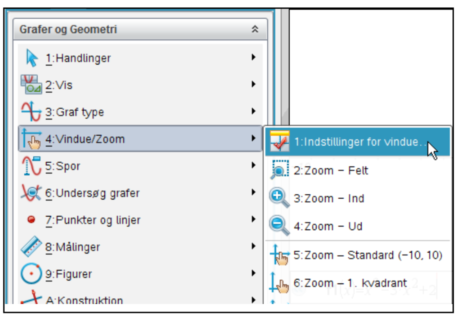


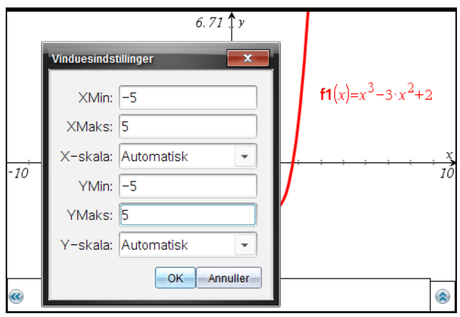
Manuel indstilling af grafvinduet

Du kan få en pænere graf ved at indskrænke vinduet. Her skal du benytte et vindue, hvor *x* løber fra -5 til 5, og *y* løber fra -5 til 5.

Vælg  4:Vindue/Zoom ▸ Indstillinger for vindue.., og indstil vinduet som vist til højre

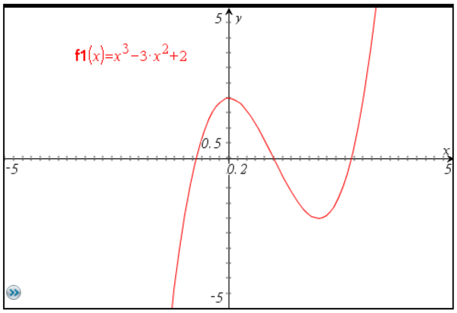
Obs
Du hopper fra felt til felt i dialogen vinduesindstillinger med TAB - tasten.

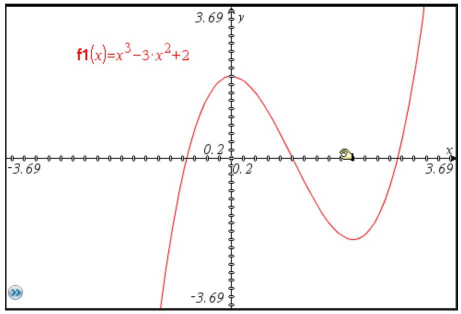




Tip
Du kan styre skalaen ved at udfylde *x*-skala og *y*-skala i dialogen vinduesindstillinger. Sættes disse til 1, fås 1 som skala i stedet for 0.5
Du kan også ændre ved at dobbeltklikke på 0.5 og ændre til 1.

tryk OK, og grafen ser herefter således ud:



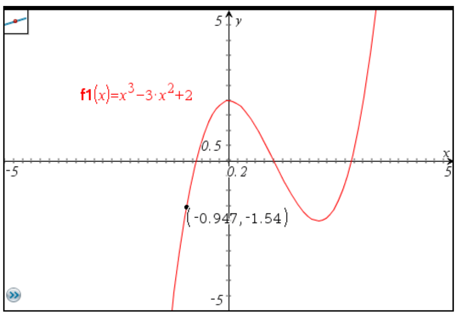


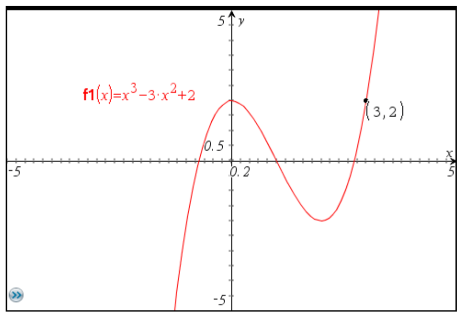
Der er en tredje mulighed for ændring af akseindstillinger:

Placer markøren ved en af aksemærkerne. Når markøren ændrer udseende til en åben hånd (højre skærmbillede ovenfor), griber med musen. Du kan nu ændre akseindstillingerne ved at trække aksemærket.
Holder SHIFT nede, mens du trækker, er det kun den ene akse der ændres.

Funktionsværdier med Punktværktøj

Funktionsværdien i 3 kan dårligt aflæses på grafen (og i 7 slet ikke), men prøv med punktværktøjet: Vælg 7: Punkter og linjer ▸ 2:Punkt på, og afsæt et punkt på grafen. Når du forlader punktværktøjet (med ESC), kan du redigere punktets koordinater (også y-koordinaten), og når du taster Enter, hopper punktet til de nye koordinater





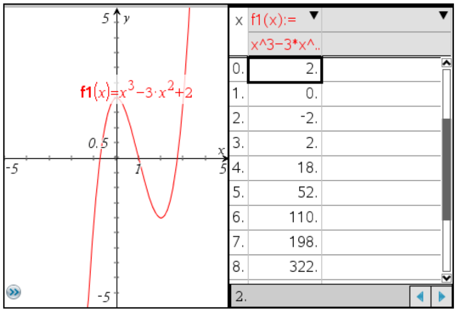
Prøv dernæst at indtaste 7 efterfulgt af Enter og se, hvad der sker. Husk, at du kan fortryde et valg med .

Funktionsværdier med en tabel

Det er meget simpelt at få lavet en tabel (et sildeben) over funktioner.

Tip
Genvejen til tabellen er Ctrl+T

Vælg  2:Vis ▸ A:Vis tabel. Skærmen opdeles i to ruder: En til funktionsgrafen, og en til tabellen. I tabellen kan du se, at $p(3) = 2$ og at $p(7) = 198$.



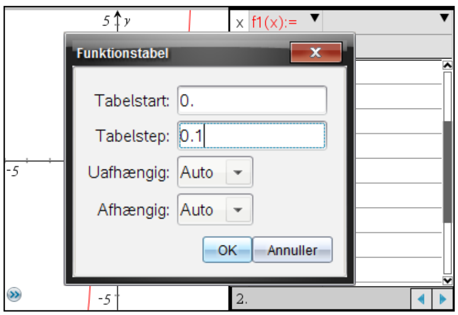
Tip
Du skifter fokus ved at klikke med musen i den rude, du vil have i fokus.

På skæmbilledet ovenfor er der en tyk ramme om tabellen. Det betyder, at tabellen er i fokus og at det er værktøjerne for tabellen der vises i sidepanelet. Hvis du vil have ændret indstillingerne i tabellen, vælger du

 5:Funktionstabel ▸ 5:Rediger funktionsindstillinger.

Indstiller du som vist på det højre skærmbillede, så vil du få en tabel med spring på 0.1

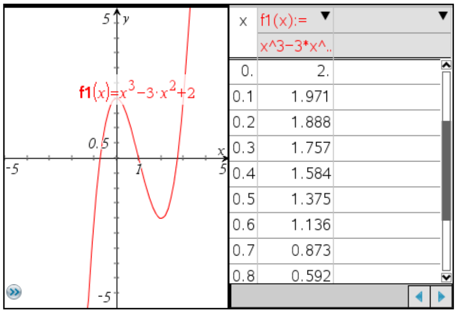
Husk
Du benytter TAB til at hoppe mellem knapper og felter i dialogbokse

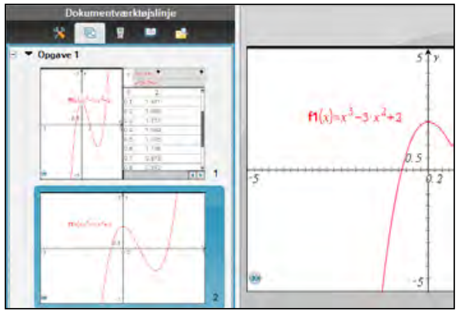


Hvis du vil beholde grafen og tabellen som en del af dit arbejde, men kunne arbejde videre med grafen uden tabel, så kan du tage en kopi af Grafværkstedet, og sætte det ind i et nyt værksted. Metoden er denne:

Sørg for, at Grafværkstedet er i fokus (tyk ramme om grafen)

Tip
Hvis du vil af med tabellen, klikker du i tabellen for at bringe den i fokus. Klik herefter på den tykke ramme og tryk på Delete.





Klik på den tykke ramme. Dette får den tykke ramme til at blinke, og du kan nu kopiere din graf med Ctrl+C. Indsæt et nyt værksted med Ctrl+I, og fjern menuen med ESC. Tilbage er blot at indsætte grafen med CtrlV.

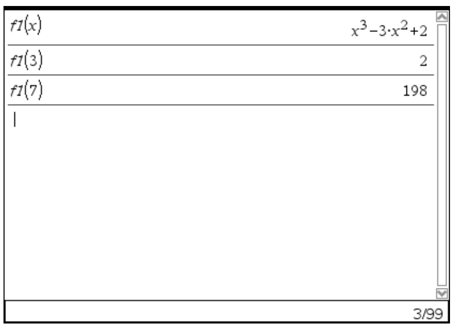
Funktionsværdier i Beregningsværkstedet

Tip
Ctrl+I bringer dig direkte til værkstedslisten.

Før du kan lave beregninger, skal du have føjet et Beregningsværksted til dit dokument.

Den beregning, der skal udføres, kan kort formuleres som *f1*(3), idet du har givet funktionen *p* navnet *f1* ved at indtaste forskriften for *p* som den første i graffeltet. Du kan overbevise dig om dette ved at skrive *f1*(*x*):

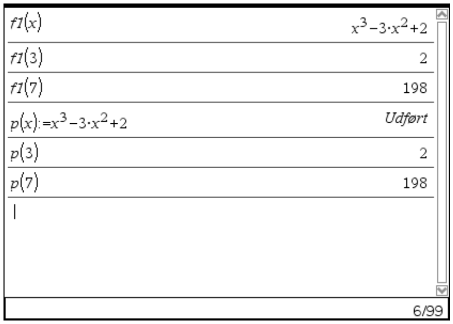
Obs
Skriver du blot *f1* og ikke *f1*(*x*), får du fejlmeddelelsen “Argumentfejl”. Du skal altså altid huske at have argumentet med.



Det ville være mere elegant, hvis man blot kunne skrive *p*(3) og *p*(7), da funktionens navn er *p*. Men det er der råd for:

Du kan definere funktionen *p* direkte ved at skrive: $p(x):=x^3-3x^2+2$. Herefter giver det mening at udregne *p*(3) og *p*(7):

Tip
Hvis du vil have tegnet grafen for *p*, kan du blot skrive navnet *p(x)* ind i graffeltet. Naturligvis får *p* så også navnet *f1* (hvis det er den første).



Alternativt kan du definere *p* ved at skrive $x^3-3x^2+2\rightarrow p(x)$, hvor pilen findes i fanen Tegn i Hjælpeprogrammer — eller du kan benytte genvejen =: (lig med kolon).

Nulpunktsbestemmelse

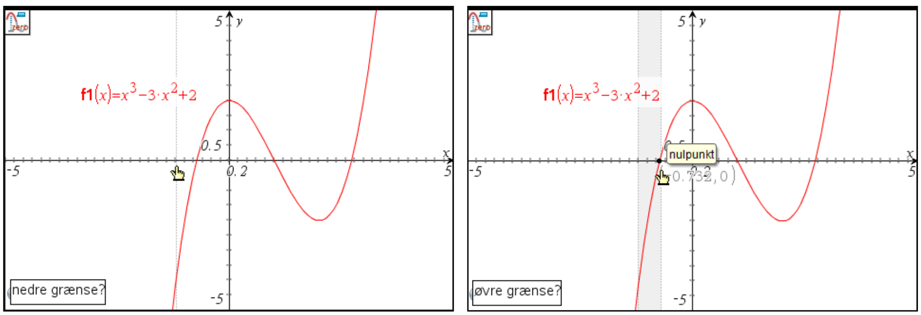
Du skal nu bestemme det nulpunkt for *p*, der ligger i intervallet [−1,0]. Hvis du ikke allerede har grafen på din skærm, så skift til Grafværkstedet.

Tip
Nulpunktsbestemmelsen kan også foretages med Sporingsværktøjet, der også viser interessepunkter.

Vælg værktøjet:  6:Undersøg grafer ▸ 1:Nul.

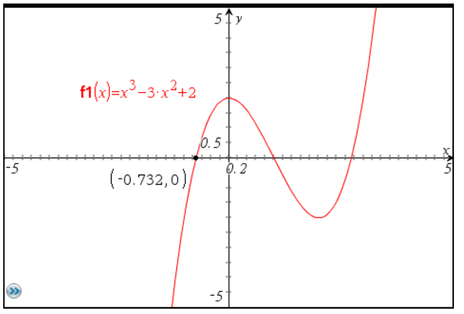
Først skal du udpege venstre endepunkt af det interval, du vil bestemme et nulpunkt i, så klik til venstre for nulpunktet:

Obs
Hvis der er flere grafer, skal du først udpege den graf, du vil analysere.



Helt tilsvarende udpeges det højre endepunkt af søgeintervallet. Så snart markøren passerer forbi nulpunktet, vil en etiket poppe op og fortælle dig, at et nulpunkt er fundet.

Klik, og minimumspunktet og værdien vises som et punkt på grafen:



Tryk Enter, og juster antallet af decimaler. Nulpunktet aflæses til – 0.732051. Tilsvarende bestemmes de andre nulpunkter.

Nulpunktsbestemmelse symbolsk

Obs
Denne opgave kan naturligvis også løses med med solve. Den eneste forskel er den måde, hvorpå løsningen vises

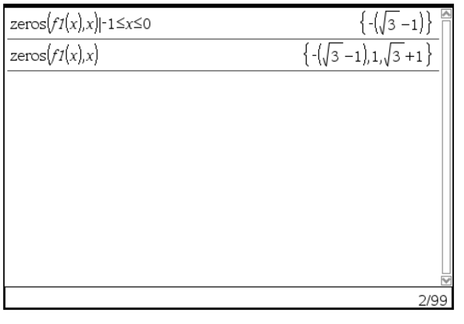
Du kan naturligvis også foretage en symbolsk bestemmelse af det nulpunkt for *p*, der ligger i intervallet [–1,0]. Hertil skal du bruge værktøjet

X= 3:Algebra ▸ 4:Find nulpunkter

Den færdige indtastningslinje skal se således ud: $zeros(p(x),x) \mid -1 \le x \le 0$

Hvis du vil finde alle nulpunkter, så dropper du blot betingelsen $|-1 \le x \le 0$. Læg mærke til, at i begge tilfælde får du resultatet som en *liste* — dvs. med krøllede parenteser omkring:

Tip
Du laver nemmest tegnene ≤ og ≥ vha genvejene <= og >=
De findes også i Tegn fanen i sidepanelet



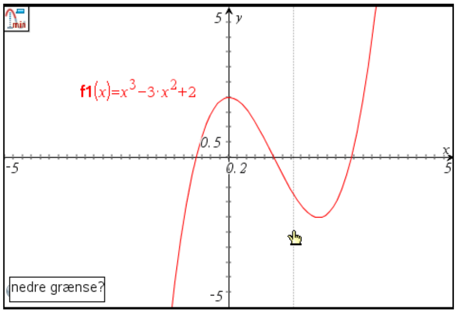
Minimum & Maksimum

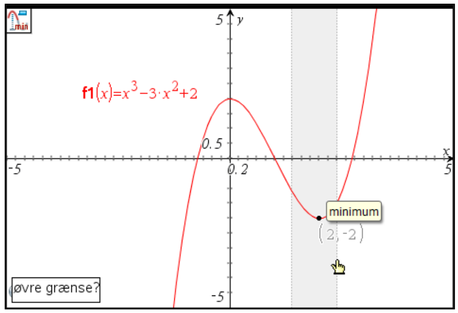
Du skal nu finde det lokale minimum, funktionen har i nærheden af 2. Hertil skal du benytte værktøjet:

Klik på 6:Undersøg grafer ▸ 2:Minimum.

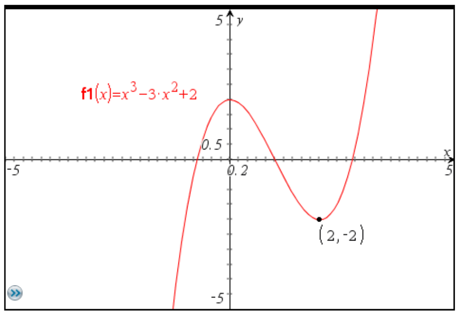
Obs
Hvis der er flere grafer, skal du først udpege den graf, du vil analysere.

Først skal du udpege venstre endepunkt af det interval, du vil bestemme minimum i, så klik til venstre for minimumspunktet:





Helt tilsvarende udpeges det højre endepunkt af søgeintervallet. Så snart markøren passerer forbi minimumspunktet, vil en etiket poppe op og fortælle dig, at et minimum er fundet. Klik, og minimumspumktet og værdien vises som et punkt på grafen:



Tip
Vil du ændre antallet af decimaler, så placerer du markøren over tallet, du vil ændre, og trykker + tasten for at få flere decimaler med, – tasten for at få færre.

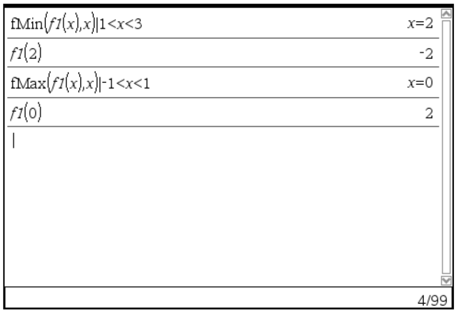
Prøv selv at bestemme det lokale maksimum. Dette får du ikke angivet som (0,2), men som (1.74E⁻7,2) — afhængig af det valgte søgeinterval. Ved at ændre antallet af viste decimaler kan du få det lokale maksimum angivet som (0.,2), hvor punktum efter 0 viser, at værdien ikke er eksakt 0. Husk på, at i Grafværkstedet sker numerisk bestemmelse. Skal det være en eksakt bestemmelse, så må du en tur i Beregningsværkstedet.

Minimum & Maksimum symbolsk

Du kan lave en eksakt bestemmelse af minimum og maksimum i Beregningsværkstedet. Hertil skal du benytte værktøjet

4:Differential og integralregning ▸ 7:Funktionsminimum

For at bestemme det minimum, der ligger i intervallet]1,3[, indtastes derfor kommandoen: $fMin(p(x),x)\,|\,1 < x < 3$



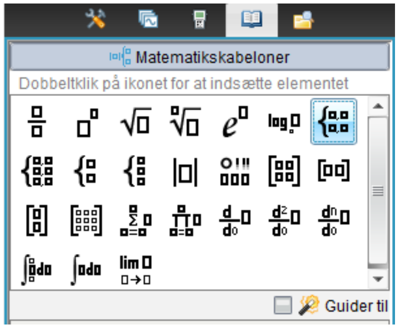
Funktion givet ved en tuborg-forskrift

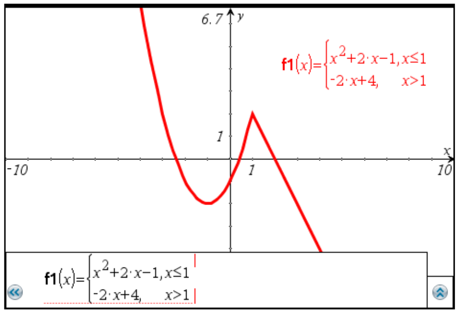
Tegn grafen for funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{for} \quad x \le 1 \\ -2x + 4 & \text{for} \quad x > 1 \end{cases}$$

og løs ligningen $f(x) = 1$

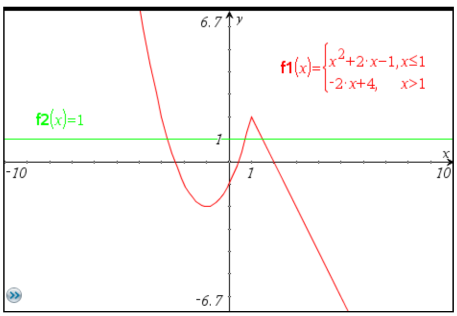
Gå til indtastningsfeltet i et Grafværkstedet, og skriv forskriften ind i *f1*, idet du bruger skabelonen for tuborg-forskrifter, som du finder i fanen Matematikskabeloner i Hjælpeprogrammer:

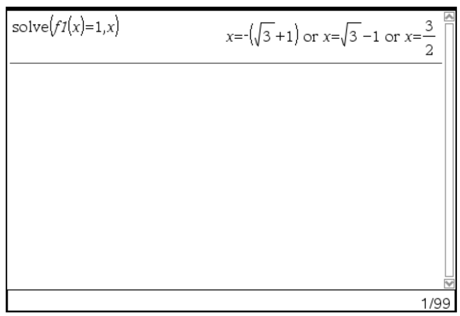




Tip
Du laver nemmest tegnene ≤ og ≥ vha tastekobinationerne >= og <=.
De findes også i Tegn fanen i sidepanelet

Ligningen løses let vha. grafværktøjerne, når først $f2(x)=1$ er indtastet. Ligningen kan selvfølgelig også løses symbolsk:



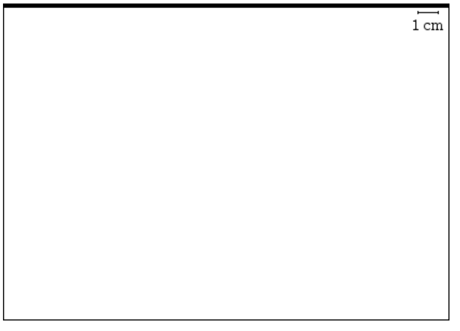


3 Geometriværkstedet

Geometriske konstruktioner

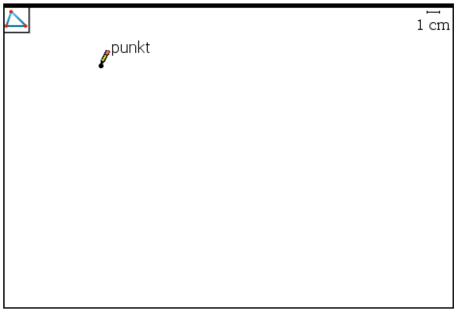
Her og i de kommende afsnit skal du lave en række geometriske konstruktioner. For at se, hvordan dette virker, skal du nu konstruere midtnormalerne i en trekant, fastlægge midtnormalernes skæringspunkt og benytte dette punkt til at konstruere trekantens omskrevne cirkel. Konstruktionen foregår i plangeometrisk visning — dvs. uden koordinatsystem.

Opret et nyt dokument og indsæt et Geometri værksted. Arbejdsområdet vil være blankt — dog med angivelse af en enhed i øverste højre hjørne. Denne er som standard 1 cm.

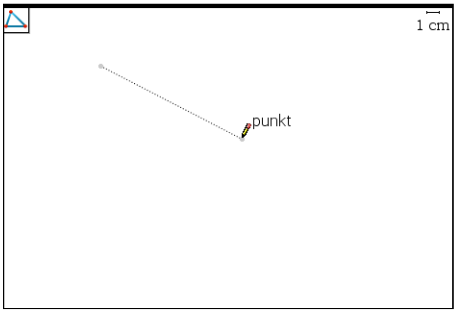


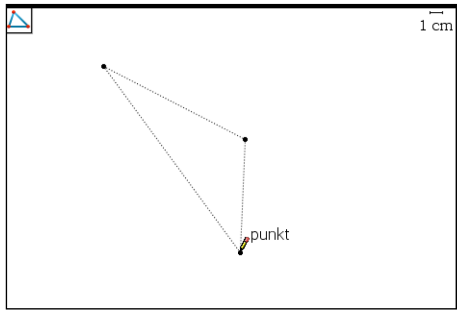
Vælg værktøjet 9:Figurer ▸ 2:Trekant. Markøren ændres til en blyant med et blinkende punkt.

Obs
Ikonen i øverste venstre hjørne viser, at trekants-værktøjet er det aktuelle værktøj. Værktøjet forlades når et nyt vælges, eller når du taster ESC.



For at tegne en trekant, skal du afsætte tre punkter i geometriske plan. Placer markøren, hvor du vil afsætte det første punkt, og klik. Når du flytter blyanten hen til det næste punkt, vil du se en stiplet linje mellem det afsatte punkt og det nye. Når du er nået til den ønskede placering, klikker du. Det sidste punkt afsætter du på samme måde:



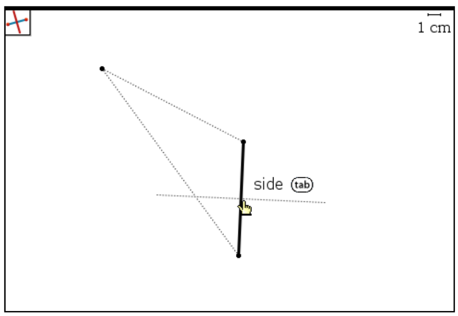


Så skal midtnormalerne konstrueres:

Vælg  A:Konstruktion ▸ 3:Midtnormal.

Til afsættelse af en midtnormal behøver du kun at udpege en af trekantens sider. Så snart markøren rammer en af siderne, ændres markøren til en pegende hånd, og midtnormalen vises som en stiplet linje:

Obs
Etiketten *side* viser, at det er en side i trekanten, du peger på.
Ved mere komplicerede konstruktioner kan det være svært at udpege det ønskede objekt. Med TAB kan du skifte mellem objekterne.



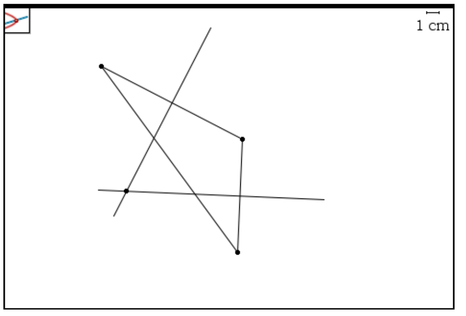
Klik for at fæstne midtnormalen. Værktøjet til konstruktion af midtnormal forbliver aktivt indtil du vælger et nyt værktøj (eller taster ESC). Så for at konstruere midtnormalen på en af de andre sider behøver du blot at klikke på ønskede side i trekanten. Gør det!

Nu skal skæringspunktet mellem de to midtnormaler konstrueres:

Vælg 7:Linjer og punkter ▸ 3:Skæringspunkt(er).

Klik på de to linjer (dvs. midtnormalerne) én efter én, og skæringspunktet fastlægges.

Obs
Når en linje udpeges bliver linjen tyk.
Når du vælger linjen (ved at klikke), så bliver linjen tynd.

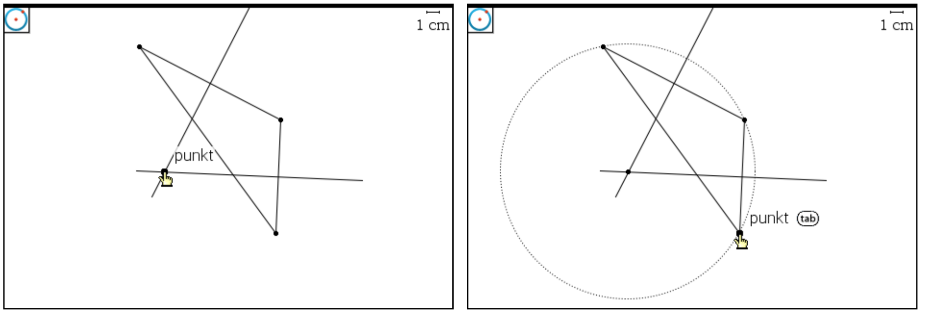


Med udgangspunkt i dette skæringspunkt skal du nu konstruere en cirkel med centrum i dette punkt og radius fastlagt som afstanden fra centrum til en af vinkelspidserne.

Vælg cirkelværktøjet med 9:Figurer ▸ 1:Cirkel

Først fører du markøren hen til midtnormalernes skæringspunkt — skæringspunktet skal blive fremhævet og etiketten *punkt* skal vises (venstre skærmbillede). Klik så, for at fastlægge centrum.

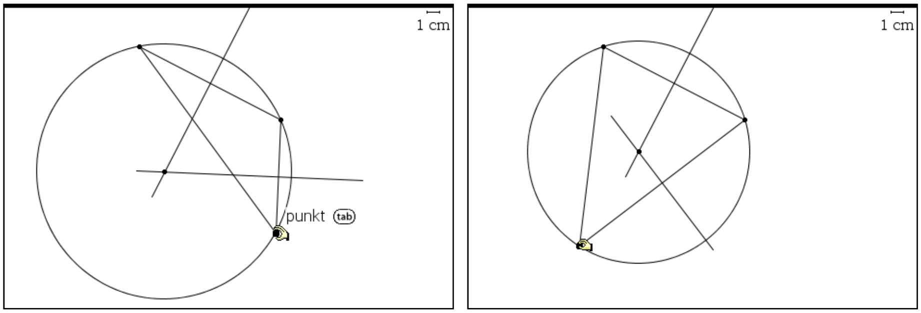
Flyt nu markøren til en af vinkelspidserne — igen skal punktet være fremhævet og etiketten *punkt* skal vises (højre skærmbillede). En stiplet cirkel antyder, hvordan resultatet kommer til at se ud. Klik for at fastlægge radius.



For denne trekant ser det ud til, at den cirkel, du har tegnet, går gennem alle vinkelspidser. For visuelt at checke, om dette er tilfældet for andre trekanter, kan du med TI-Nspire CAS dynamisk ændre trekanten, så hele konstruktionen opdateres:

Forlad cirkelværktøjet ved at taste ESC. Før markøren hen til en af vinkelspidserne, og sørg for, at markøren er en åben hånd og etiketten *punkt* vises.

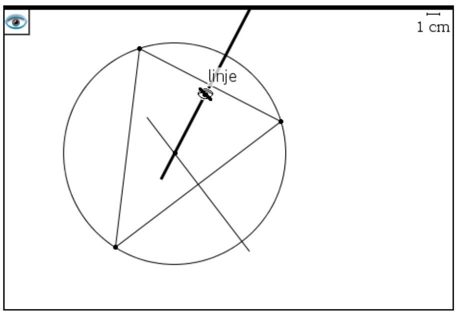
Grib punktet, og træk det til en anden placering. Læg mærke til, at figuren opdateres løbende under deformationen.

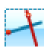


Du kan bygge videre på konstruktionen ved fx at konstruere trekantens indskrevne cirkel. Inden du går i gang med dette, er det en god ide at skjule midtnormalerne, der jo kun tjener som konstruktionslinjer. Det gør du således:

Vælg  1:Handlinger ▸ Vis/Skjul.

Flyt markøren hen på en af midtnormalerne, så markøren ændres til et ‘overstreget øje’ og klik så. Herved bliver midtnormalen næsten usynlig. Gør det samme med den anden midtnormal. Når du forlader Vis/Skjul-værktøjet (tast ESC), så er midtnormalerne usynlige.

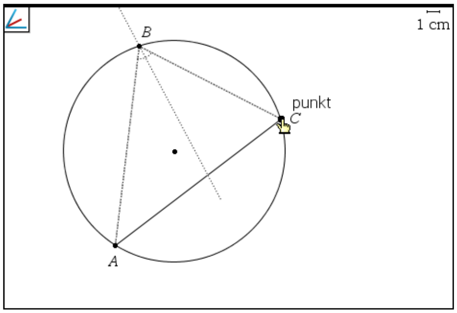


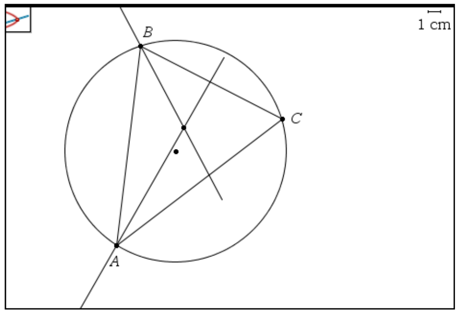
Centrum for den indskrevne cirkel konstrueres som vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt. Værktøjet finder du her:  A:Konstruktion ▸ 4:Vinkelhalveringslinje.

Tip
Dette er nemmest at navngive punkter samtidig med at de afsættes: Tast blot navnet umiddelbart efter punktet er placeret. Ved navngivning senere højre-klikker du, og vælger Etiket.

Husk
at når du udpeger et punkt, så skal markøren være en pegende hånd og etiketten *punkt* skal vises.

I nedenstående skærmbillede er vinkelspidserne navngivet for at lette beskrivelsen af, hvordan udpegning af en vinkel foregår: Hvis du vil tegne vinkelhalveringslinjen fra $\angle B$, så udpeger du vinklen ved at udpege punkterne A, B, C i denne rækkefølge (eller C, B, A).

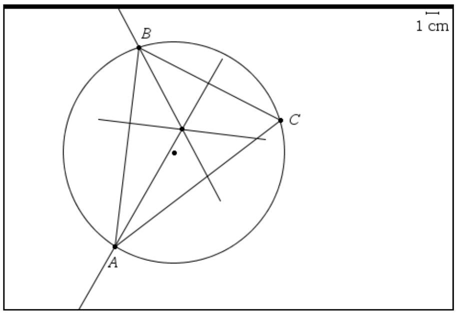


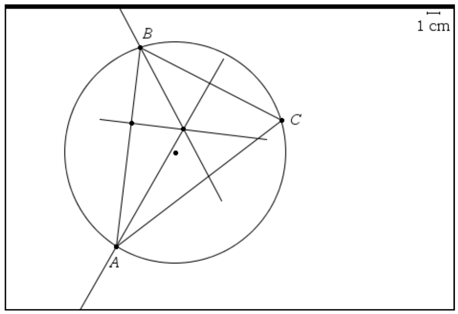


Det højre skærmbillede viser to vinkelhalveringslinjer med skæringspunktet konstrueret. Tilbage er blot at bestemme et punkt på periferien af den indskrevne cirkel. Da trekantens sider er tangenter til den indskrevne cirkel, kan du konstruere tangeringspunktet ved at konstruere en linje gennem centrum og vinkelret på en af siderne:

Vælg A:Konstruktion ▸ 1:Vinkelret,

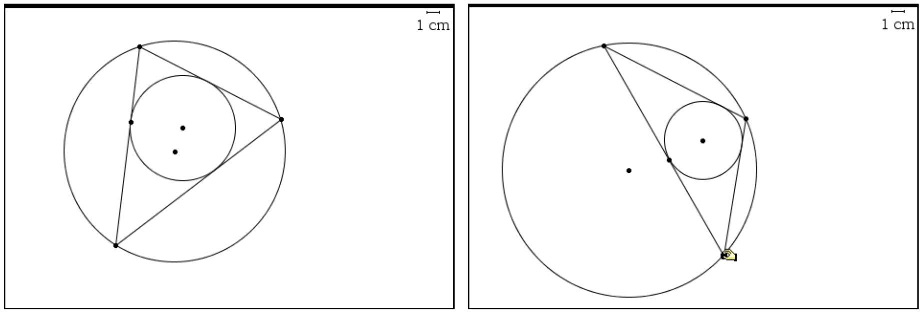
og udpeg en af siderne og centrum:





På det højre skærmbillede er skæringspunktet mellem den konstruerede linje og siden BC konstrueret.

Skjul alle konstruktionslinjer, og konstruer den indskrevne cirkel ved at bruge cirkel-værktøjet og udpege centrum og tangeringspunkt:



Grib fat i en af trekantens vinkelspidser og deformer figuren. Check, at alt virker .

Geometri i Grafværkstedet

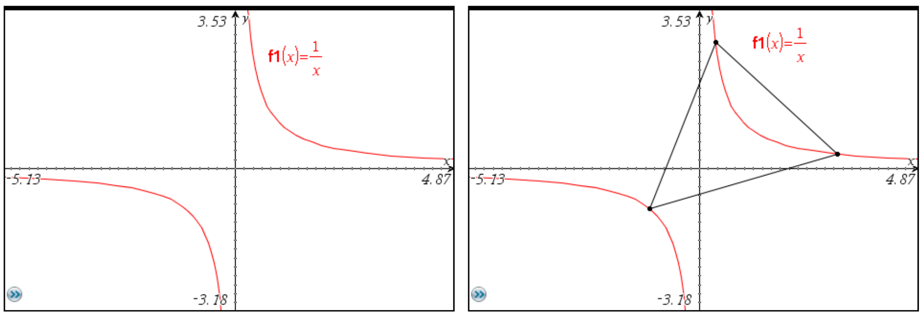
Du kan også lave geometriske konstruktioner i Grafværkstedet:

---

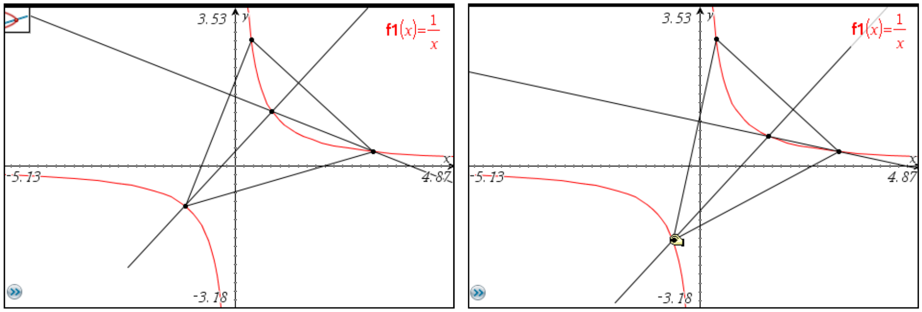
1. Tegn grafen for $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
2. Vælg 3 punkter på denne graf og konstruer en trekant ud fra disse.
3. Konstruer højdernes skæringspunkt i trekanten.
4. Fremsæt en påstand om højdernes skæringspunkt

Nedenfor ser du grafen *f* tegnet i et Grafværksted (der er zoomet ind en gang) og trekanten konstrueret:

Tip
Benyt *Punkt på* værktøjet til at konstruere punkterne. Benyt *Trekant* værktøjet til at konstruere trekanten. Skjul koordinaterne.



Konstruer to højder med *Vinkelret* værktøjet, og konstruer de to højders skæringspunkt:



Træk nu i et punkt, og følg nøje med i, hvad der sker. Inden du fremsætter din påstand, skal du også undersøge, hvad der sker, hvis de 3 punkter ligger på samme gren af hyperblen.

Konstruktion af målfast figur

I trekant ABC er $\angle A = 35^\circ$, $b = 5$ cm og $a = 6$ cm.

1. Tegn en model af trekanten
2. Bestem de ukendte sider og vinkler samt trekantens areal.

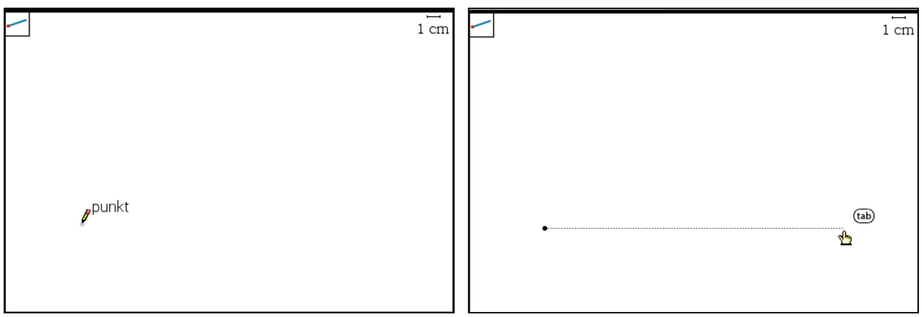
Opret et nyt Geometriværksted. Først skal du konstruere $\angle$A. Hertil skal du bruge en halvlinje:

Vælg 7:Linjer og punkter ▸ 6:Halvlinje

og afsæt to punkter. Så vil du få en halvlinje med start i det første punkt

Tip
Hvis sidelængderne i stedet er fx 50 cm og 60 cm behøver du ikke at skalere tallene for at få figuren til at være på skærmen:
Klik på enheden og ret denne til 10 cm.

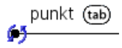
10 cm

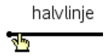


Denne halvlinje skal nu drejes 35º. Vælg hertil værktøjet

 B:Transformation ▸ 4:Drejning.

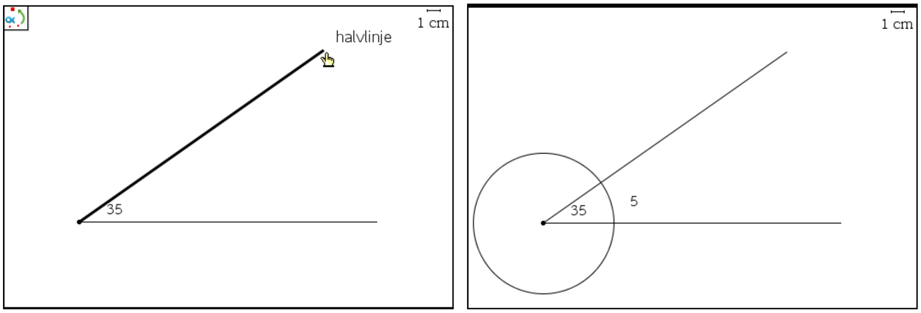
Til en drejning skal du udpege tre ting:

1. *Drejningspunktet* — her udpeger du halvlinjens startpunkt 

2 *Objektet, der skal drejes* — udpeg halvlinjen 

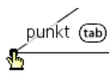
3. Drejningsvinklen — tast 35 (venstre skærmbillede) 

Obs
Sørg for, at **Vinkel i Geometri** er indstillet til grader: Dobbeltklik på **Indstillinger** i statuslinjen og indstil vinkel under **Grafer og Geometri**.



På det højre skærmbillede ser du cirkel tegnet med centrum i halvlinjens startpunkt og radius 5. Denne laver du med værktøjet

 A:Konstruktion ▸ 7:Passer:

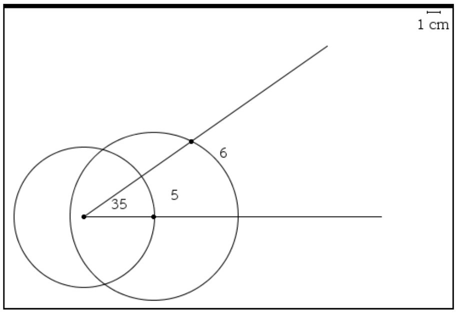
1. *Centrum* — som centrum udpeger du halvlinjens startpunkt 

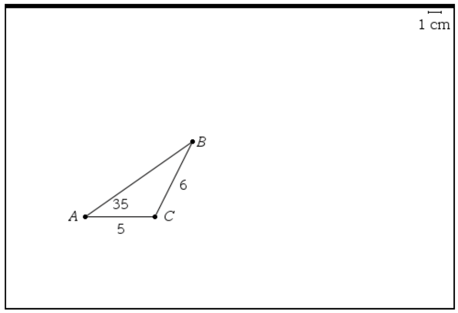
2 *radius* — indtast 5 

Husk
Du konstruerer skæringspunkter med  7:Linjer og punkter ▸ Skæringspunkt(er)

Desuden skal du konstruere skæringspunktet (B) mellem cirklen og den vandrette halvlinje. Konstruer tilsvarende med passer-værktøjet en cirkel med centrum i B og radius 6. Konstruer også her skæringspunktet med det venstre vinkelben:

Obs
Det er vigtigt, at du konstruerer en trekant, og ikke blot forbinder med linjestykker.





På det højre skærmbillede er der konstrueret en trekant ud fra de tre konstruerede punkter med værktøjet

9:Figurer ▸ 2:Trekant

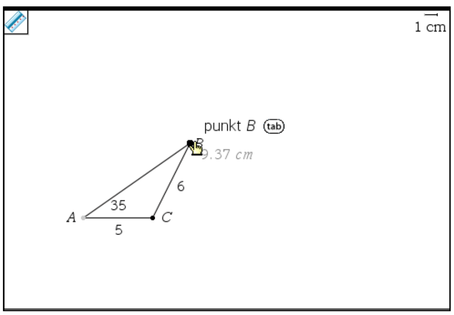
Desuden er alle konstruktionslinjer skjult og vinkelspidserne er navngivet ved at højreklikke på vinkelspidsen og vælge **Navngiv** fra kontekstmenuen.

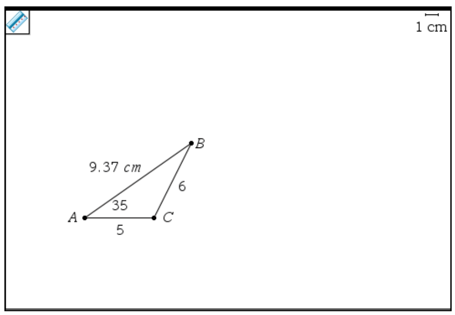
Nu er alt klar til at foretage målinger på modellen. Værktøjet, du skal bruge, finder du her:

8:Målinger ▸ 1:Længde:

Klik først i punktet A, og dernæst i punktet B. Så vises længden af siden AB ganske svagt. Flyt markøren hen, hvor du ønsker, at længden skal stå. Klik for at placere:

Obs
Hvis du klikker på en af trekantens sider, så får du vist omkredsen af trekanten, og ikke sidelængden.

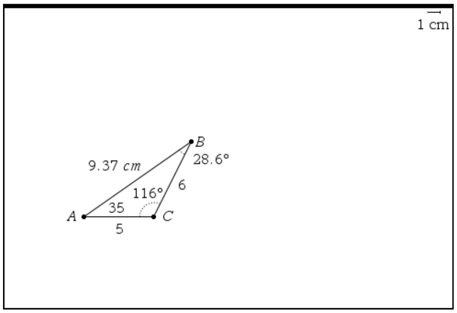


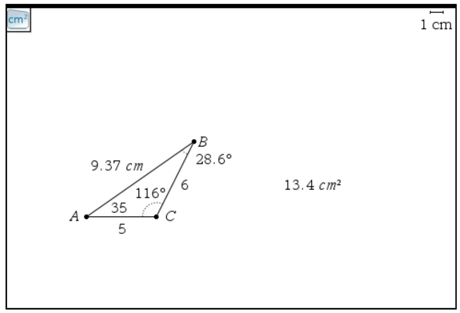


Obs
Du måler vinkler med værktøjet
▸ Vinkel
og arealer med
▸ Areal

Med vinkelværktøjet måler du $\angle B$ og $\angle C$. Her skal du udpege vinklen ved at udpege tre punkter med den aktuelle vinkelspids som den midterste. Arealet bestemmes ved at udpege trekanten (ét klik):

Tip
Du kan gemme en måling i en variabel: Højre-klik på målingen, vælg Lagre i kontekstmenuen og indtast et navn.



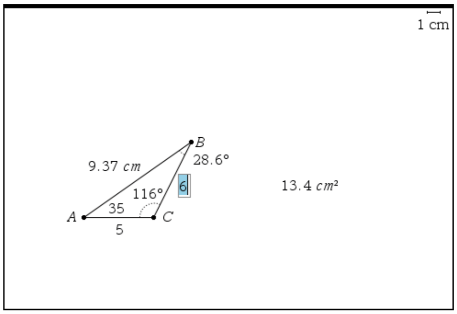


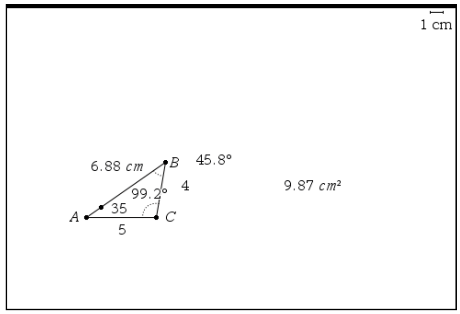
Obs
Pas på, at du ikke kommer til at slette tekstfeltet. Skulle det ske, så kan du redde det med ↶ .

I denne model kan du ikke gribe fat i et hjørne og trække, men du kan ændre i tallene 35, 5 og 6, som konstruktionen er baseret på. Du klikke blot på et af tallene og indtaste en ny værdi. Herefter vil modellen omgående blive gentegnet, og de nye værdier vil blive vist.

Særlig interessant er det i ovenstående model at ændre *a* til fx 4. Dette er gjort på skærmbillederne nedenfor:

Tip
Hvis du synes, at tegningen er blevet for lille, kan ændre enheden til fx 0.5 cm.

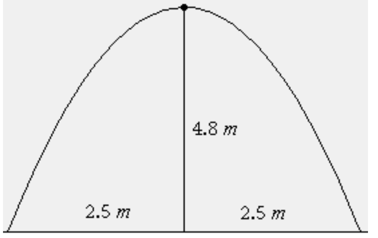




Læg mærke til, der dukkede et nyt punkt på siden AB. Her er der altså to mulige konstruktioner. For at forstå, hvad der sker, er det en god ide at vise konstruktionscirklen med centrum i *C*.

Porten i parablen

Figuren viser gavlen på en parabelformet hal

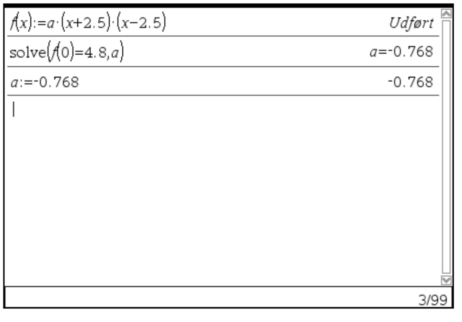


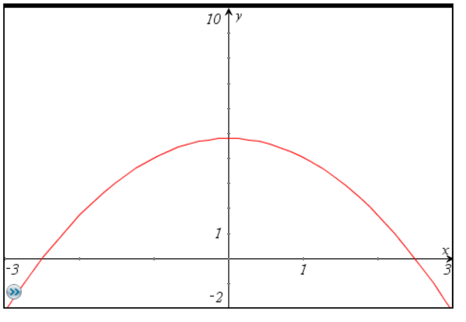
a. Indlæg et passende koordinatsystem, og angiv en forskrift for parablen

I gavlen skal indsættes en rektangulær port

b. Bestem den højest mulige port, der kan indsættes, når bredden af porten skal være 3 m, og bestem den port, der har det størst mulige areal.

Indlæg koordinatsystemet, så parablen skærer akserne i $(-2.5, 0), (2.5, 0)$ og $(0, 4.8)$. Forskriften beregnes i Beregninger og parablen tegnes i et Graf værksted:



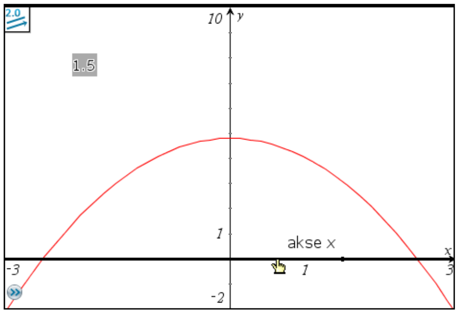


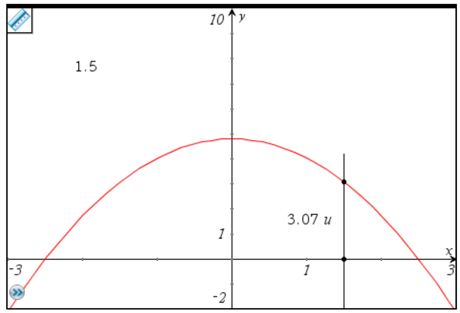
Lav en port med bredden 3 m således: Vælg værktøjet

 A:Konstruktion ▸ 8:Overfør måling.

Indtast tallet 1.5 og afslut med Enter. Udpeg dernæst *x*-aksen for at overføre målet hertil.

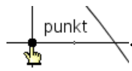
Tip
Hold markøren over ikonen i arbejdsområdet, så vil du få en beskrivelse af, hvordan værtøjet virker.

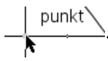


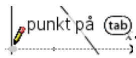


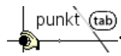
I det højre skærmbillede er konstrueret en linje vinkelret på *x*-aksen i det nye punkt, og linjens skæringspunkt med parablen er konstrueret. Tilbage er blot at måle afstanden mellem de to punkter. Hertil benytter du måleværktøjet, og udpeger de to punkter.

Til den anden del af opgaven skal du konstruere en port på et *frit punkt* på *x*-aksen. Ovenstående konstruktion kan ikke umiddelbart genbruges, da punktet på *x*-aksen er låst, men med værktøjet  1:Handlinger ▸ 9:Omdefiner, kan du frigøre punktet:

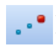
1. Udpeg det punkt, du vil omdefinere: 

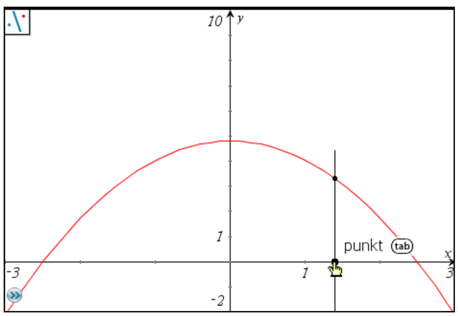
. Når du klikker, ændres markøren til en pil 

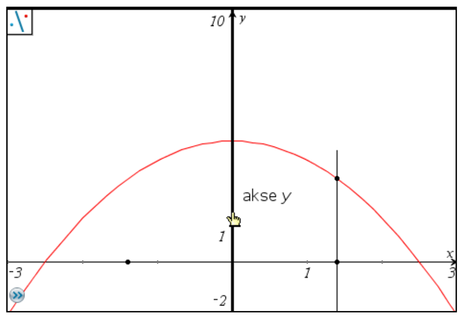
.
2. Flyt markøren en anelse. Markøren ændres da til 

. Afslut med at klikke og forlad værktøjet med ESC. Check, at du kan gribe punktet 

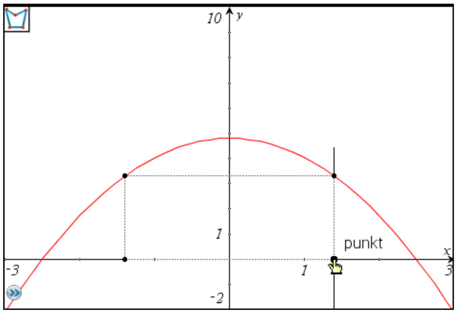
.

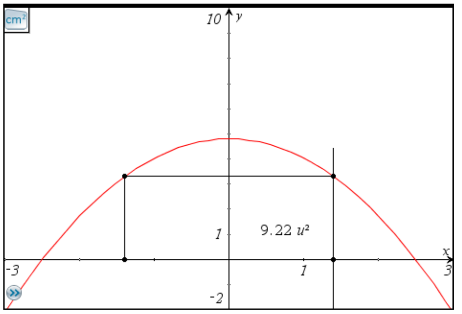
Så skal konstruktionspunkterne spejles i *y*-aksen. Benyt værktøjet  B:Transformation ▸ 2:Spejling i linje. Udpeg først det punkt, du vil spejle, dernæst spejlingsaksen (her y-aksen):



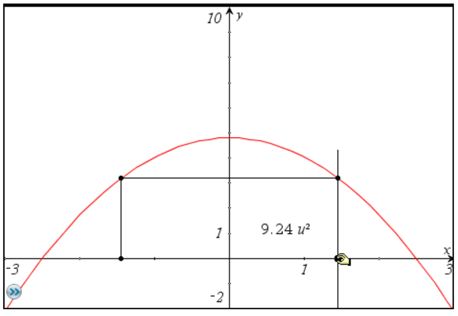


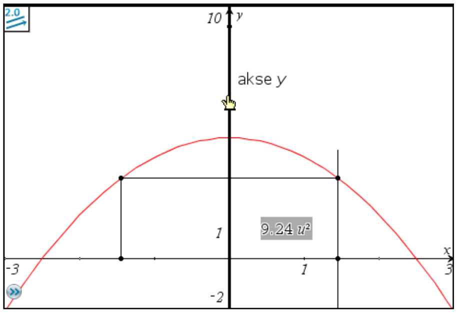
Benyt værktøjet 9:Figurer ▸ 4:Polygon til at konstruere porten. Du udpeger de 4 punkter ét efter ét, og trykker Enter i det sidste punkt for at afslutte. Mål arealet:





Skjul konstruktionslinjen. Grib derefter det frie punkt på *x*-aksen, og flyt lidt frem og tilbage indtil du finder det største areal.



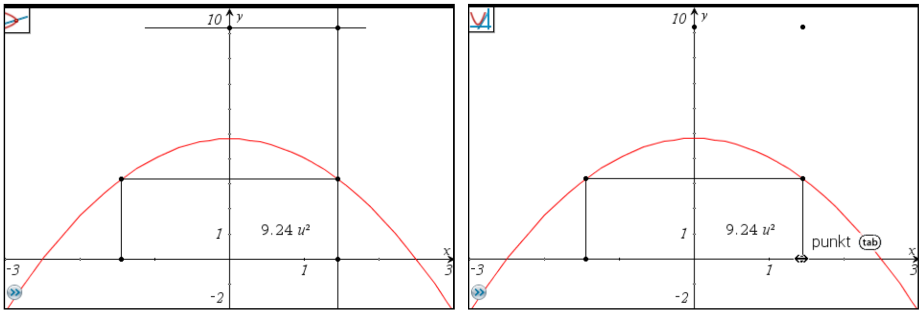


En elegant metode til at finde det maksimale areal er at lave et såkaldt geometrisk sted. Hertil skal du først konstruere et punkt (x,y), hvor y er arealet svarende til (den halve) portbredde x :

1. Overfør areal-tallet til *y*-aksen (højre skærmbillede ovenfor). Du skal måske regulere din *y*-akse først, så du kan se punktet — YMaks skal mindst være 10.

2. Konstruer dernæst en linje vinkelret på *x*-aksen gennem *x*-punktet, og en linje vinkelret på y-aksen gennem det konstruerede punkt.

3. Konstruer skæringspunktet for de to linjer.

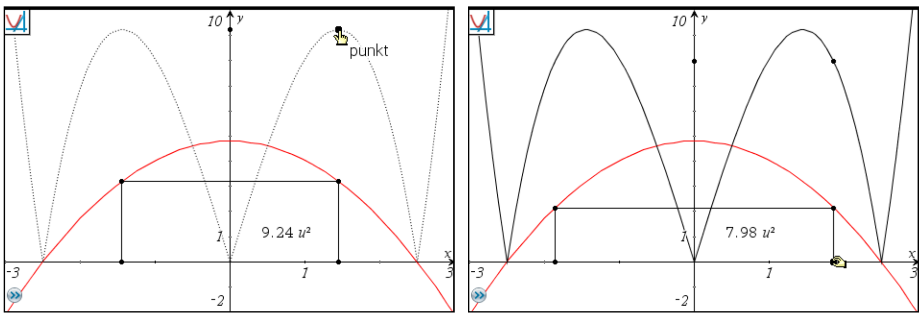


4. Skjul de to konstruktionslinjer, og vælg værktøjet A:Konstruktion ▸ 6:Geometrisk sted.

   Udpeg det frie punkt på x-aksen. Se det højre skærmbillede ovenfor. Pilen viser, i hvilke retninger punktet kan bevæges.

   Udpeg herefter det konstruerede punkt — og straks ser du det geometriske sted i stiplet form. Når du klikker, får du et fuldt optegnet spor.

Træk i det frie punkt igen, og følg med i, hvad der sker på kurven. Træk også punktet uden for intervallet $[\,0\,,\,2.5\,]$, så får du en forklaring på, hvorfor kurven ser ud, som det gør.



Du skal være opmærksom på, at det er et tilnærmet resultat, du har fundet her. Arealet af porten kan udtrykkes ved funktionen $g(x) = 2 \cdot x \cdot f(x),\ 0 \le x \le 2.5$. Maksimum for denne funktion er 9.2376, hvilket du nemt kan bestemme i et Beregningsværksted.

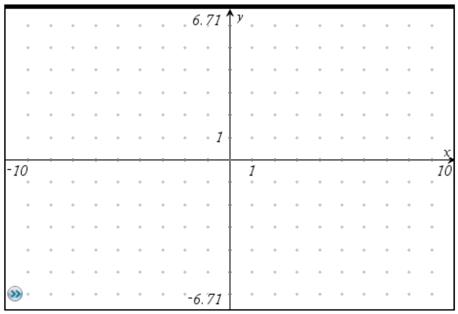
Analytisk geometri

I den analytiske geometri har du de geometriske objekter beskrevet ved hjælp af punkter. Fx er en linje beskrevet fuldstændig ved to punkter på linjen.

Find ligningen for linjen gennem punkterne $(-6, 4)$ og $(5, -4.5)$.

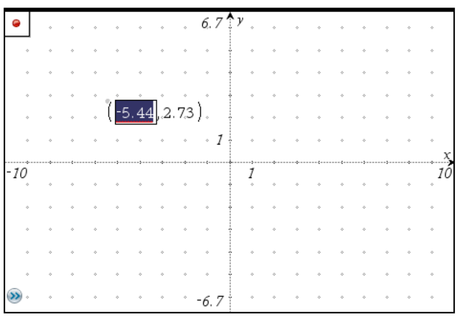
Obs
Du i stedet åbne et nyt Geometri værksted og vælge 2:Vis ▸ 1:Graftegning

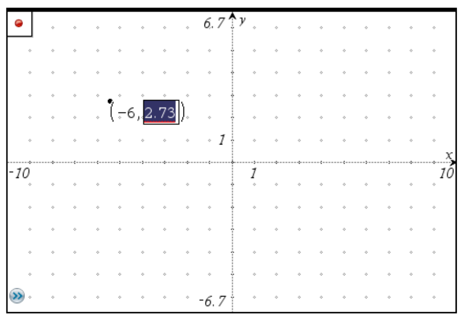
Åbn et nyt Grafværksted, og indsæt et gitter med 2:Vis ▸ 6:Vis gitter:



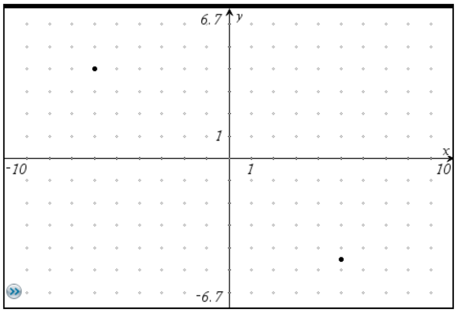
Obs
Du kan ændre skalaen ved at klikke på skalamærkerne og ændre værdien.

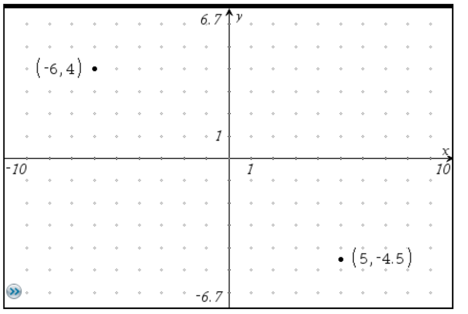
Du afsætter i gitteret ved at vælge 7: Punkter og linjer ▸ 1:Punkt, og blyant-ikonen kommer til syne. Tast nu en venstreparentes, og blyantens koordinater vises. Du vil sikkert se andre koordinater end dem du ser på det venstre skærmbillede nedenfor, men det betyder ikke noget. Indtast nu -6 efterfulgt af Enter, og y-koordinaten markeres:





Indtast 4 og afslut med Enter:

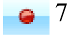




Obs
Du ændrer et koordinatsæt ved at flytte markøren til koordinatsættet, og dobbeltklikke på koordinaterne.

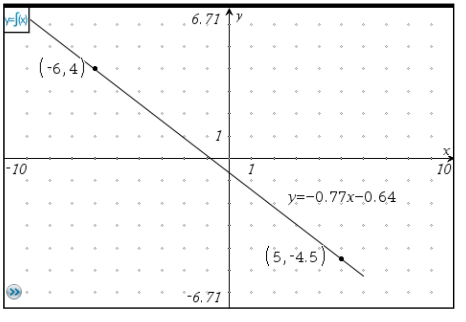
Punktet $(5, -4.5)$ afsættes helt tilsvarende.

Du kan få vist punktets koordinater med værktøjet  1:Handlinger ▸ 7:Koordinater og ligninger.
Flyt markøren hen til punktet. Når finger-ikonet vises, vises samtidig koordinaterne nedtonet. Klik for at vælge punktet, og klik der, hvor du vil have koordinaterne placeret.

Tegn en linje gennem punkterne $(-6, 4)$ og $(5, -4.5)$ med linjeværktøjet  7: Punkter og linjer ▸ 4:Linje.

Du kan få vist linjens ligning med  1:Handlinger ▸ 7:Koordinater og ligninger.

Tip
Skulle du have glemt, hvordan du afsætter punkter, flyt da blyanten op på værkstedsikonen, og en vejledning vil komme frem.



Du kan afsætte punkter i gitteret uden at skulle indtaste koordinater — du skal blot flytte blyant-ikonen til det ønskede gitterpunkt, og når meddelelses ‘punkt på’ vises, da klikker du.

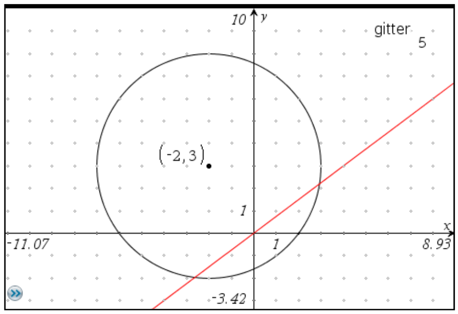
Du kan naturligvis også arbejde helt uden gitteret.

Skyderobjekter

En cirkel har centrum i $(-2,3)$ og radius $r = 5$. Find ligningen for de to tangenter, der er parallelle med linjen med ligningen $y = \frac{3}{4}x$.

Obs
Du i stedet åbne et nyt Geometri værksted og vælge 2:Vis ▸ 1:Graftegning

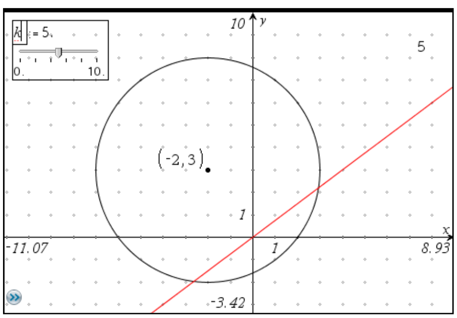
Åbn et nyt Grafværksted, og indsæt et gitter med 2:Vis ▸ 6:Vis gitter:
Afsæt punktet $(-2,3)$ i gitteret, og indtast tallet 5 som tekst. Benyt cirkel værktøjet til at tegne cirklen ved at udpege centrum og radius. Tegn linjen som funktionen $f1(x) = \frac{3}{4}x$. Indstil vinduet passende:

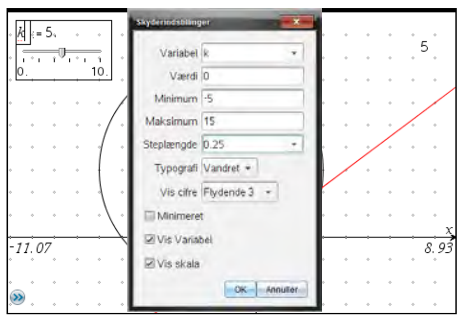


Vælg nu 1:Handlinger ▸ A:Opret skyder. En skyderobjekt kommer da til syne på skærmen med et variabelnavn markeret. Ret dette variabelnavn til *k*.

Højre-klik på selve skyderen, vælg Indstillinger og indstil som vist:

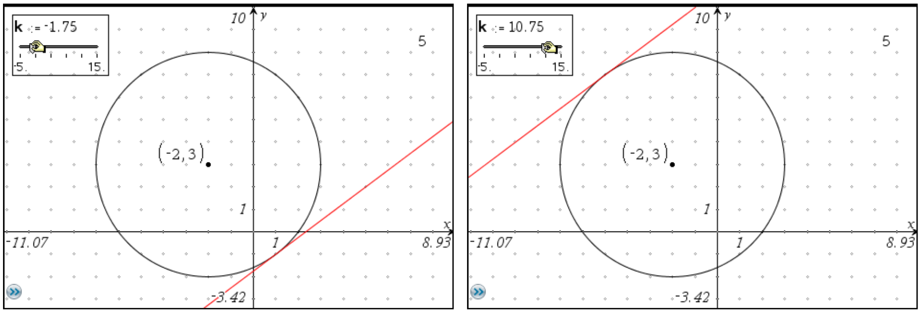
Tip
I kontekst menuen får du også mulighed for animation. Prøv dette!





Knyt skydervariablen k til funktionen ved at ændre til $f1(x) = \frac{3}{4}x + k$. Grib skyderen, og træk i begge retninger indtil linjen bliver tangent til cirklen:

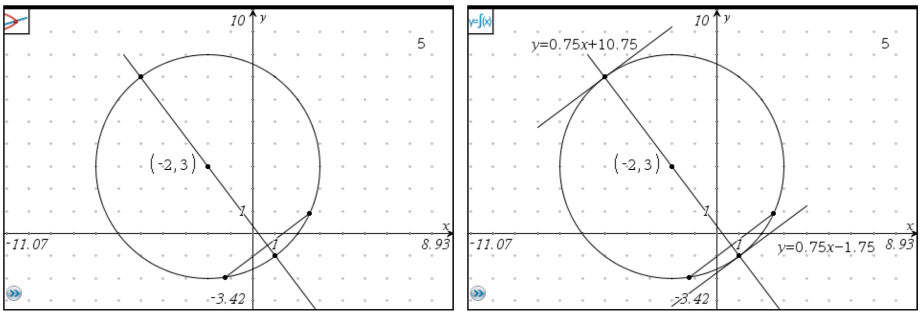
Tip
Du kan ændre skyderens start- og slutværdi direkte, ligesom du kan med en koordinatakse.



Obs
En linje defineret som en funktion kan ikke umiddelbart indgå i en Vinkelret konstruktion.
Skal den det, så kan du konstruere en linje oven på den retlinede graf, og lade denne indgå. Efterfølgende kan grafen skjules.

Du kan også gå helt anderledes til værks uden brug af skyder, så fjern +k i $f1(x)$:

Konstruer først skæringspunkterne mellem linjen og cirklen, og forbind de to punkter med et linjestykke. Skjul linjen. Konstruer en linje gennem centrum, og vinkelret på linjestykket. Konstruer skæringspunkterne mellem denne linje og cirklen:



Tilbage er blot at konstruere linjer i de to skæringspunkter parallelle med linjestykket. Hertil benytter du

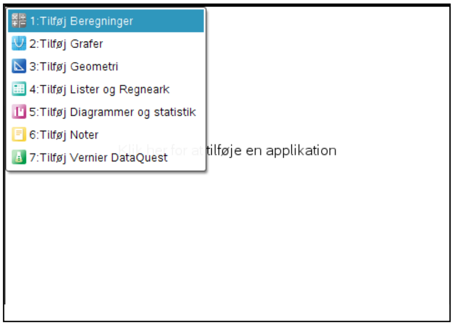
A:Konstruktion ▸ 2:Parallel,

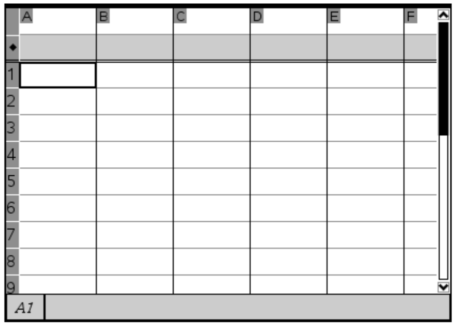
og får vist ligningerne med

1:Handlinger ▸ 7:Koordinater og ligninger.

4 Lister og Regneark

Opret et nyt dokument, og indsæt et Lister og Regneark værksted



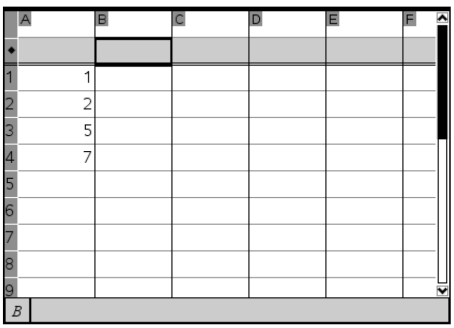


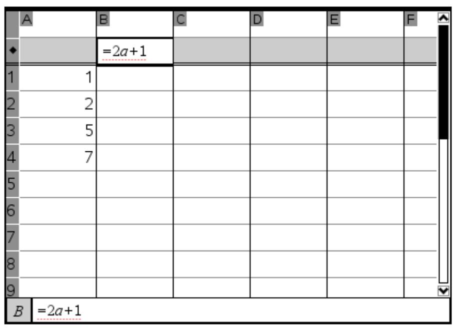
Regnearket

På det højre skærmbillede ovenfor ser du regnearket. Den øverste række viser kolonnenavnene (A, B, C, ...). Til højre for kolonnenavnet er en tom celle, hvor du kan tildele kolonnen et navn. Rækken umiddelbart under er formellinjen, og først i 3 række begynder selve regnearket.

Tast tal ind i kolonne A, som vist nedenfor, og placer markøren i formelfeltet under B, hvor du skriver =2a + 1 (du kan følge din indtastning i nederste linje på skærmen):

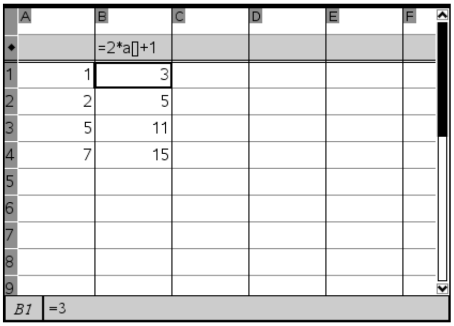
Tip:
Du navigerer i regnearket med piletasterne.
En indtastning afsluttes med Enter eller PilNed.

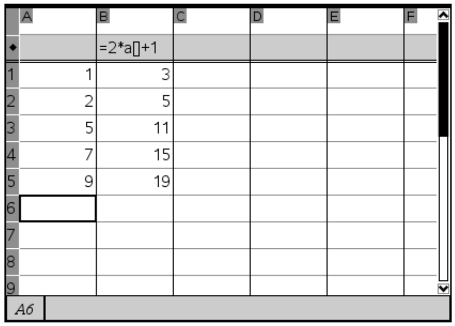




Tast Enter, og de beregnede værdier fyldes i kolonne B (venstre skærmbillede neden-for):

Obs
For at undgå navnekonflikt sættes automatisk [] efter *a* i formlen for kolonne B.





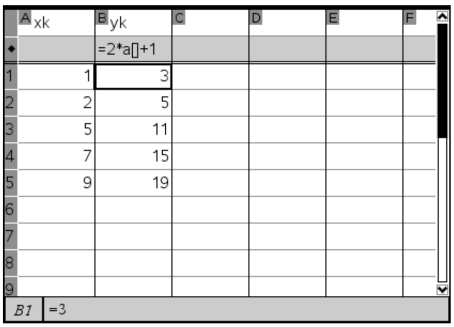
Naviger til celle A5, og indtast her fx 9 efterfulgt af Enter (højre skærmbillede ovenfor).

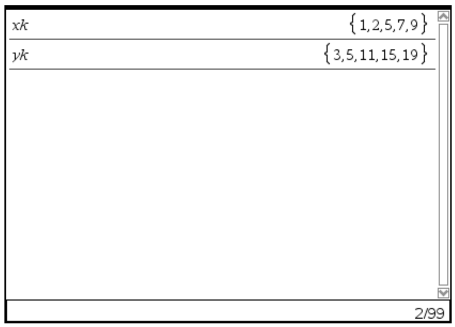
Navngivning af kolonner

Pil op til feltet til højre for kolonnenavnet A, og skriv her *xk*. Tilsvarende skriver du *yk* i feltet til højre for B (venstre skærmbillede nedenfor)

Variabelnavnene *xk* og *yk* er tilgængelige i andre værksteder. For at undersøge dette nærmere, kan du fx indsætte Beregninger, og beregne værdien af variablerne *xk* og *yk*:

Obs
xk og *yk* er såkaldte listevariable





Cellereferencer og -formler

Et beløb på 1000 kr. blev ved starten af 2004 indsat på en konto. Rentesatserne i perioden 2004 - 2008 var som vist i tabellen

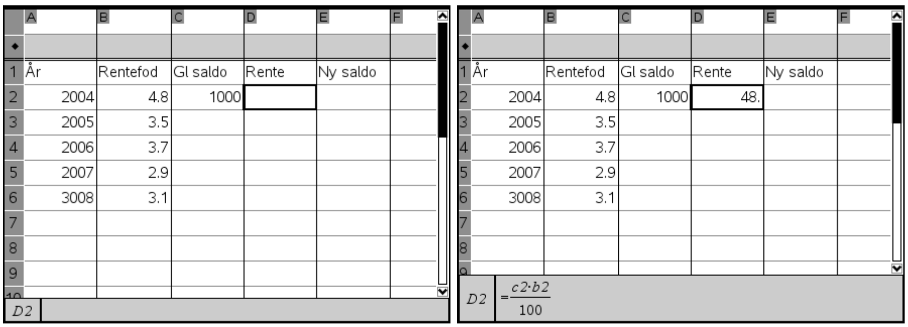
År	2004	2005	2006	2007	2008
Rentefod i %	4,8	3,5	3,7	2,9	3,1

Lav et regneark, der viser, hvordan saldoen på kontoen har udviklet sig år for år.

Obs
Anførselstegn kommer i par (ligesom parenteser)

Opret et nyt Lister og Regneark værksted, og indtast tabellens oplysninger vist nedenfor. Når du indtaster tekst i en celle, skal teksten omsluttes af anførelsestegn — ellers opfattes teksten som et variabelnavn

Obs
TI-Nspire CAS skelner ikke mellem store og små bogstaver, så det er ligegyldigt om du skriver *c2* eller *C2*



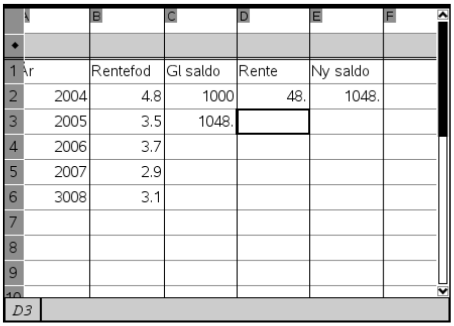
I celle D2 skal det første års rente beregnes. Dette sker ved at indtaste formlen =*C2*B2/100* i celle D2 (højre skærmbillede ovenfor).

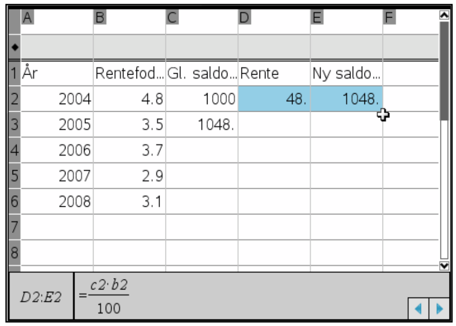
Tip
I stedet for at skrive *c2* i formlen kan du blot klikke på cellen, og *c2* vil blive indsat i formlen

I celle E2 skal saldoen efter det første år beregnes, dvs., at indholdet i celle C2 og celle D2 skal lægges sammen. Dette sker med formlen =*C2+D2*, som skrives i celle E2

Saldoen, der er beregnet i celle E2, er det beløb, der skal forrentes i det efterfølgende år. Indholdet af celle C3 skal derfor være det samme som indholdet af celle C2. Dette klarer du let ved at indtaste formlen =*E2* i celle C3.

Herefter skulle dit regneark se således ud:

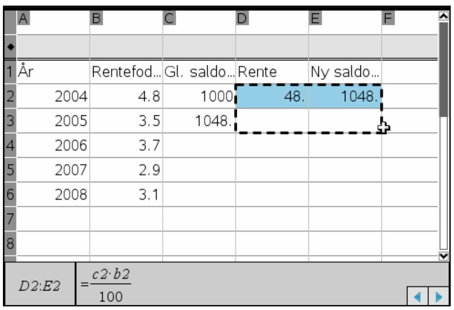


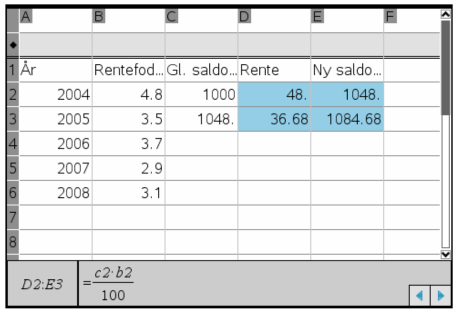


Udfyldningen af resten af regnearket vil ske ved kopiering:

Formlerne, der skal stå i celle D3 og E3, er helt analoge til formlerne i celle D2 og E2 — blot skal cellereferencerne ændres, så de refererer til celler med samme relative placering. Dette sker helt automatisk således:

Marker cellerne D2 og E2, og flyt markøren til feltets nederste højre hjørne (figuren til højre ovenfor). Markøren ændres til et . Træk med musen en celle ned (venstre skærmbillede nedenfor), og slip:

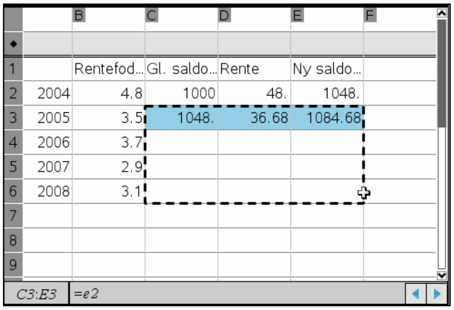


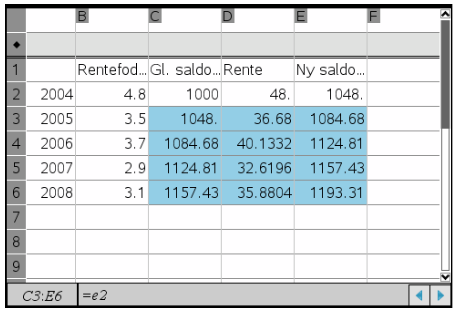


Obs
Et firkantet område specificeres ved at angive øverste venstre celle og nederste højre celle. Mellem de to celler sættes et kolon (:)

Klik på cellerne D3 og E3 for at checke, om formlerne er som forventet.

Cellerne C3, D3 og E3 indeholder nu formler, der kan kopieres til de tre resterende rækker. Så marker området C3:E3, og træk 3 rækker ned for at udvide den stiplede boks:

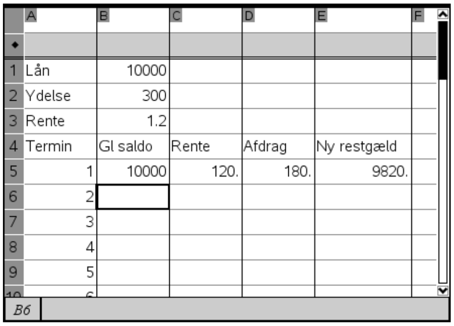


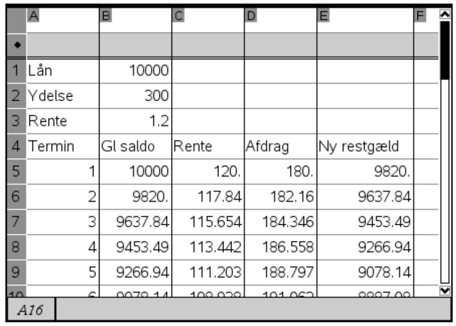


Tip
Hvis du ønsker, at beløbene skal vises med 2 decimaler, skal du vælge indstillingen **Fast2** i dokument-indstillinger.

Absolut cellereference

Hvis du vil lave en plan for afviklingen af et lån kan du stort set gå frem som i eksemplet ovenfor:





Begynd som vist på det første skærmbillede. Dog skal du her sikre, at referencerne til B2 (ydelsen) og B3 (renten) i dine formler forbliver uændrede under en kopiering. Dette klarer du ved at låse cellereferencen ved at indsætte $-tegn. Indtast formlerne:

i celle B5	*=b1*
i celle C5	*=b5*b3/100*
i celle D5	*=b2–c5*
i celle E5	*=b5–d5*
i celle B6:	*=e5*

og kopier (som ovenfor) i to omgange.

5 Diagrammer og Statistik

I Diagrammer og Statistik værkstedet kan du visualisere data i mange forskellige diagramtyper, undersøge data, lave kurvetilpasning, deskriptiv statistik og hypotesetest.

Obs
En *liste* kan fx være en navngivet kolonne i et regneark

Diagrammer og Statistik er meget tæt forbundet med Lister og Regneark, og tilføjer du et Diagrammer og Statistik værksted til et tomt dokument, så får du blot at vide, at der ikke er nogen lister til stede. Start derfor i Lister og Regneark.

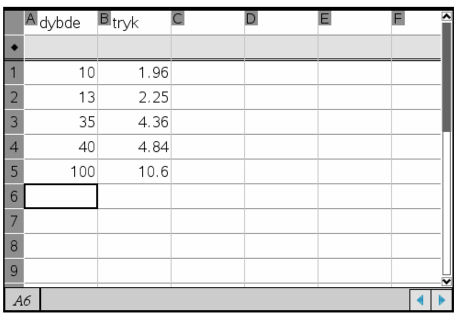
Indtastning og plot af data

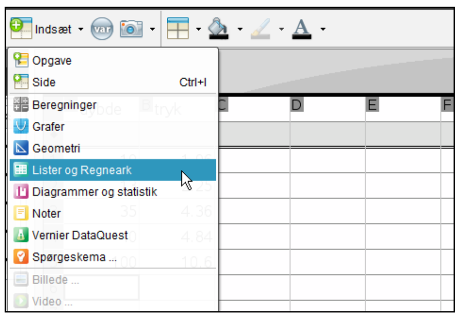
Opret et nyt dokument og tilføj et Lister og Regneark værksted. Indtast tallene i nedenstående tabel, der viser trykket i forskellige dybder under havoverfladen

Dybde (*m*)	10	13	35	40	100
Tryk(*atm*)	1.96	2.25	4.36	4.84	10.60

Navngiv de to kolonner *Dybde* og *Tryk*:

Obs
Hvis du får behov for at tilpasse kolonnebredden gør du således: Placer markøren på skillelinjen mellem to kolonner i navnefeltet. Markøren ændrer da udseende til en dobbeltrettet pil. Træk til den ønskede bredde.

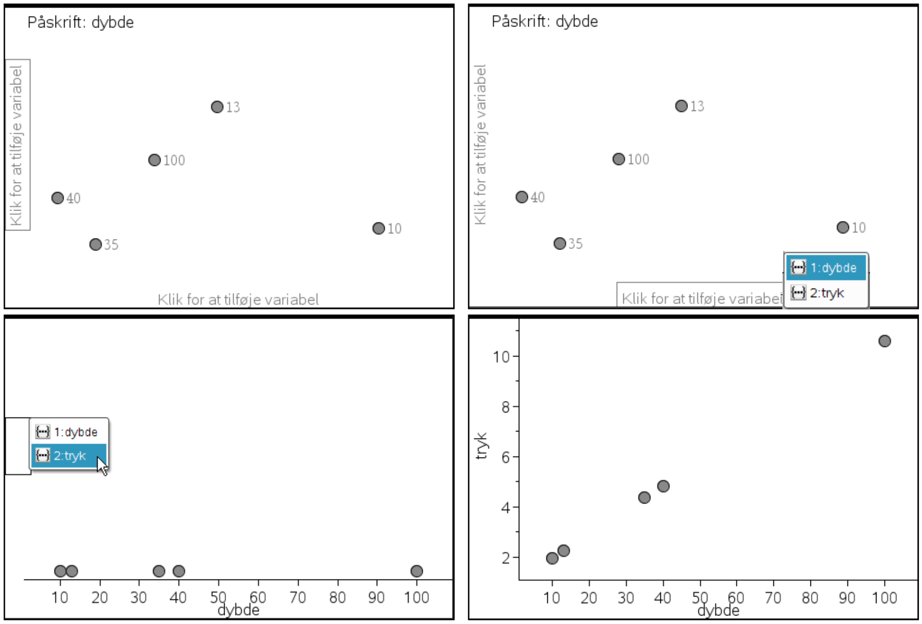




Indsæt nu et Diagrammer og Statistik værksted, og straks kommer der en graf med 5 punkter. Du skal blot fortælle, at dybde skal knyttes til *x*-aksen og trykket skal knyttes til *y*-aksen:

I bunden af skærmen klikker du på [Klik her for at tilføje en variabel], og der kommer en valgliste med mulige variabler frem. Vælg **dybde**.

Klik i venstre side af skærmen. Så kommer valglisten atter frem, og du vælger her **tryk**.



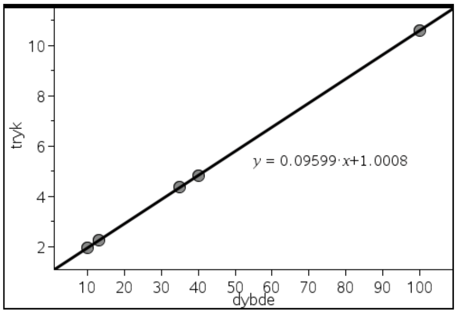
Lineær regression

De 5 datapunkter udviser et pænt lineært forløb, så det vil være naturligt at prøve at lægge en ret linje mellem punkterne. Du kan direkte få bestemt den bedste rette linje gennem datapunkterne i Diagrammer og Statistik værkstedet:

Vælg 4:Undersøg data ▸ 6:Regression ▸ 1:Vis lineær (mx+b)

Tip
Du slipper af regressionslinjen med 4:Undersøg data ▸ 6:Regression ▸ 1:Skjul lineær

Tip
Regressionsligningen finder du som stat.RegEqn ved at trykke



Så let kan det gøres! Læg i øvrigt mærke til, at denne metode ikke er forbeholdt lineær regression.

Boxplot

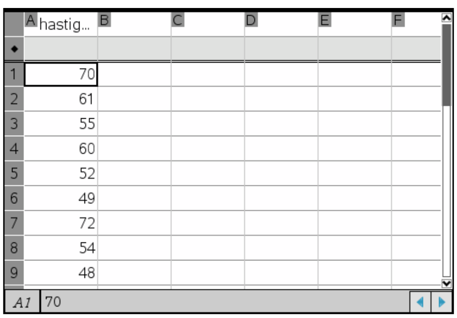
Man har observeret 16 bilers hastighed gennem en by, hvor den højest tilladte hastighed er 50 km/t. De observerede hastigheder var

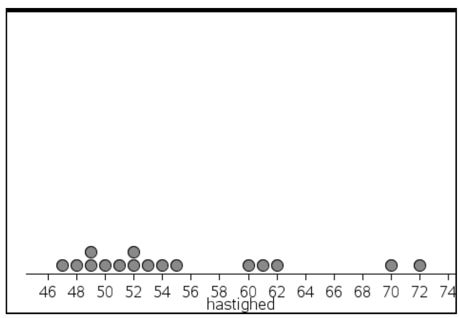
$$70,\ 61,\ 55,\ 60,\ 52,\ 49,\ 72,\ 54,\ 48,\ 53,\ 47,\ 62,\ 49,\ 51,\ 52,\ 50$$

Tegn boxplottet for denne fordeling.

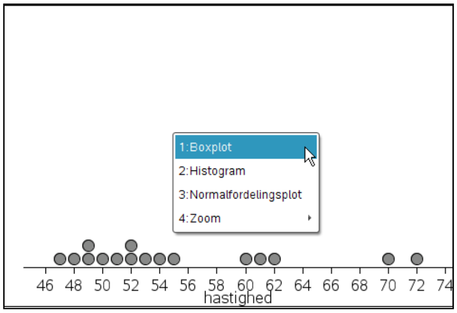
Tast hastighederne ind i en kolonne i et Lister og Regneark værksted. Navngiv kolonnen *hastighed* — ellers bliver den ikke tilgængelig i Diagrammer og Statistik værkstedet.

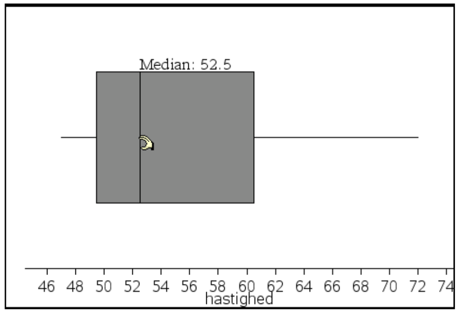
Tilføj herefter et Diagrammer og Statistik værksted, og knyt *hastighed* til x-aksen:





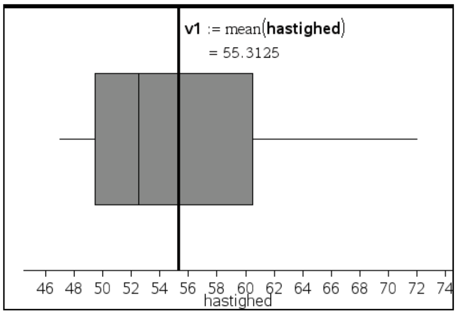
Højre-klik i arbejdsområdet, vælg Boxplot i menuen, og boxplottet tegnes. Ved at flytte markøren til boxplottets linjer, kan du få oplyst kvartilsættet:

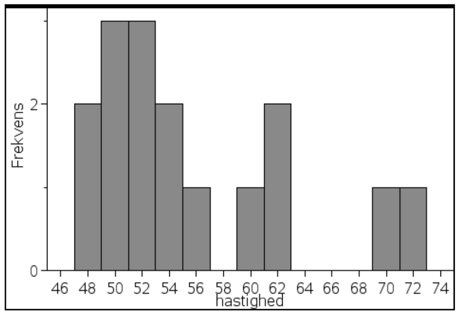




Du kan plotte middelværdien sammen med et boxplot: 4:Undersøg data ▸ 8:Plot værdi. Indtast mean(*hastighed*) i det indtastningsfelt, der kommer frem:

Tip
Benyt til at indsætte variablen hastighed.





Du kan let skifte mellem de forskellige plottyper: Prikplot, Boxplot, Histogram og Normalfordelingsplot. Prøv mulighederne. Ovenfor er vist det standardhistogram, TI-Nspire CAS leverer. Hvis du ønsker større intervaller i histogrammet kan du gribe og trække i skillelinjerne — eller lave (mere præcise) indstillinger ved at kalde histogrammets kontekstmenu frem ved at højre-klikke, og vælge 5:Søjleindstillinger

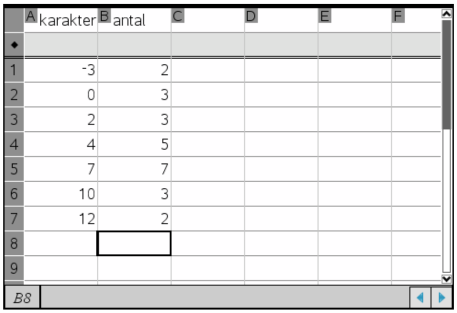
Boxplot efter en hyppighedsliste

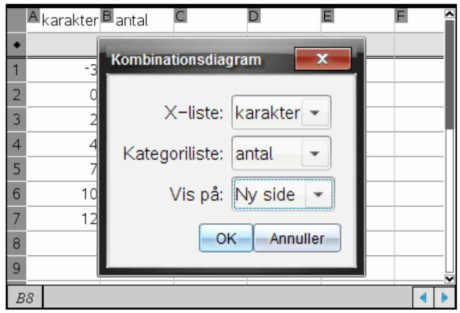
Et matematikhold fik til skriftlig eksamen følgende karakterer

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Hyppighed	2	3	3	5	7	3	2

Tegn boxplot for denne fordeling

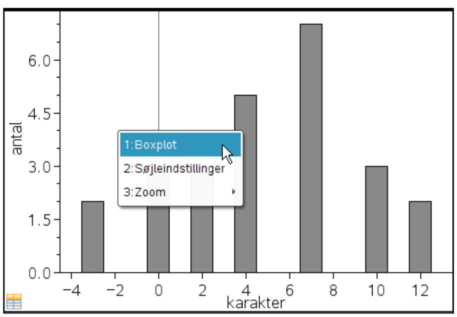
Opret et nyt Lister og Regneark værksted. Indtast tabellens oplysninger som vist nedenfor:

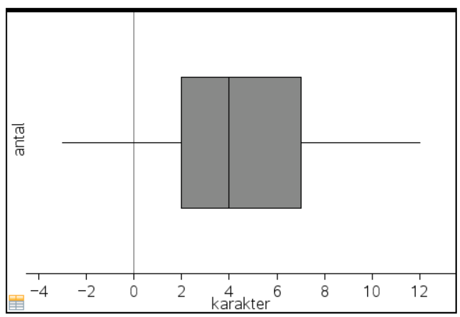




Vælg 1,3,5 3:Data ▸ 5:Kombinationsdiagram. Indstil dialogen som vist, og tast Enter. Du vi da få tegnet et stolpediagram på en ny side. Højreklik for at ændre graftypen til boxplot:

Obs
Læg mærke til den lille ikon, der dukker op, i nederste venstre hjørne.
Den viser, at det er et kombinationsdiagram.





Sammenligning af boxplot

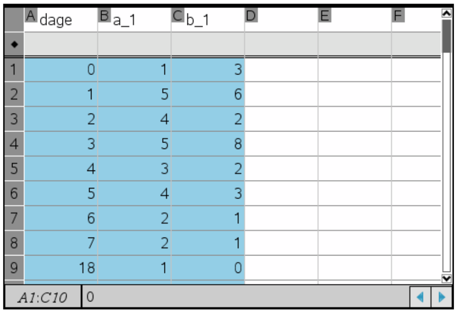
I to klasser er fraværet for et kvartal opgjort til

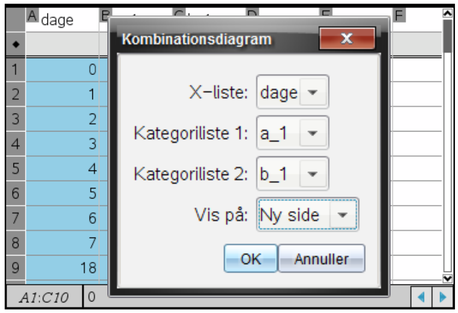
Antal dage	0	1	2	3	4	5	6	7	18	20
Antal elever 1a	1	5	4	5	3	4	2	2	1	1
Antal elever 1b	3	6	2	8	2	3	1	1	0	0

Sammenlign fraværet i de to klasser ved at tegne boxplot for begge

Indtast data i et Lister og Regneark værksted, navngiv kolonnerne og marker hele dataområdet:

Tip
Hvis du ikke markerer området, kan du kun vælge én kategoriliste. Du kan dog siden i Diagrammer og Statistik tilføje en kategoriliste.

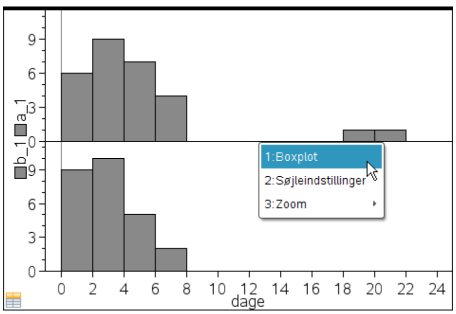


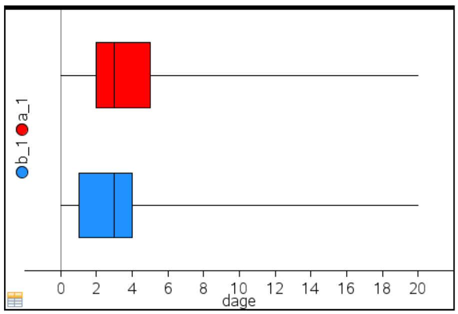


Tip
Observationerne 18 og 20 er atypiske, og afsættes derfor som *isolerede* punkter.
Ved at vælge ▸ Udvid boxplotgrænser kan du få punkterne forbundet.

Vælg 3:Data ▸ 5:Kombinationsdiagram. Indstil dialogen som vist, og tast Enter. Du vi da få tegnet de to stolpediagrammer på samme nye side. Højreklik for at ændre graftypen til boxplot.

Tip
Farvelæg boxplottet ved at højreklikke og vælge Farve.





χ^2-*test for uafhængighed*

I dette og det næste afsnit skal du med TI-Nspire CAS regne et par af de opgaver der er i Susanne Christensens artikel “At træffe sine valg i en usikker verden”.

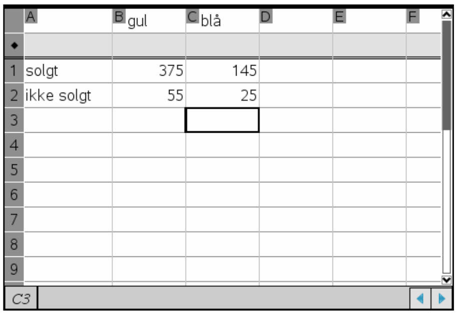
En forretningskæde vil undersøge, om farven på indpakningen af nye kartofler påvirker salget.
Butikken sælger derfor i en periode poser med samme slags kartofler, alle med 2,5 kg/pose og til samme pris.
Der bliver i alt sendt 600 poser kartofler ud i butikkerne, hvoraf 520 bliver solgt. Af de solgte poser er 375 gule, og der er 55 gule poser tilbage. De øvrige poser er blå.

Undersøg, om der er grundlag for at påstå, at farven påvirker salget af kartofler.

Først skal du lige vha. lidt hovedregning regne ud, at der er solgt 145 blå poser, og der er 25 blå poser tilbage.

Indtast oplysningerne i et Lister og Regneark værksted:

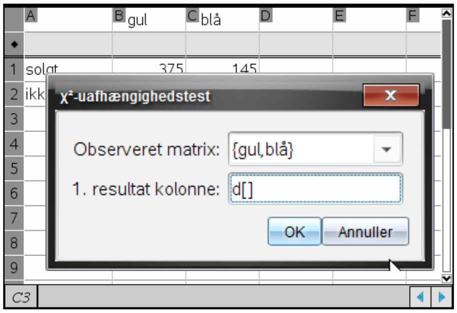
Obs
Kolonnenavnene *gul* og *blå* er variabler. Rækkenavnene ‘Solgt’ og ‘ikke solgt’ er tekst.

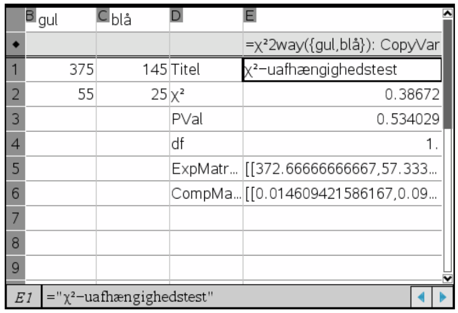


Du skal afgøre, om de oplyste data er i rimelig overensstemmelse med nulhypotesen om uafhængighed mellem farve og antal solgte poser. Hertil skal du benytte det indbyggede test for uafhængighed af to variable.

Testen kan klares direkte i Lister og Regneark:

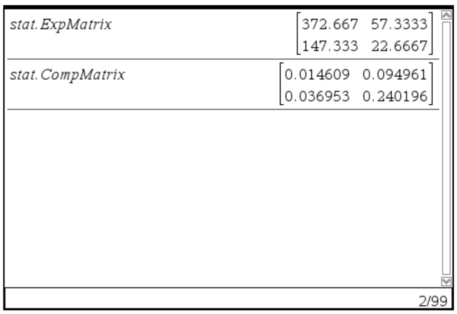
Vælg 4:Statistik ▸ 4:Statistiske tests... ▸ 8:χ^2 uafhængighedstest.... Guiden forventer, at du indtaster navnet på en matrix med observationerne. Dette kan du klare ved at indtaste {gul,blå}:





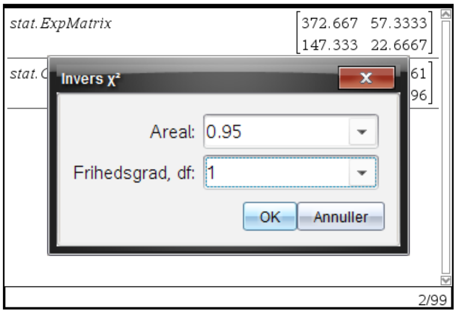
Af skærmbilledet til højre fremgår:

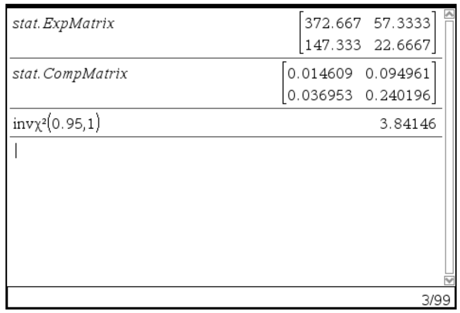
1. χ^2 - teststørrelsen har værdien 0.38672
2. *p*-værdien er 53.4%, dvs. sandsynligheden for at finde en teststørrelse, der er mindst lige så skæv som den observerede, er 53.4%. Nulhypotesen accepteres altså på signifikansniveauet 5%.
3. Teststørrelsen er χ^2 - fordelt med 1 frihedsgrad.
4. De forventede værdier finder du i matricen ExpMatrix og enkeltbidragene til χ^2 - teststørrelsen finder du i CompMatrix. Vil du se de to matricer sker det nemmest i et Beregningsværksted, hvor de hentes via var - knappen:



Du får ikke oplyst den kritiske værdi for en test på signifikansniveau 5%. Skal du bruge denne, må du selv beregne den. Hertil skal du benytte den inverse χ^2 - fordeling med 1 frihedsgrad. Du kan foretage beregningen i såvel Beregningsværstedet som i Lister og Regneark. Det nemmeste er i Beregningsværkstedet:

Vælg 4:Statistik ▸ 5:Fordelinger ▸ 9:invers χ^2, og indtast som vist:





Dette viser, at den kritiske værdi er 3.84.

χ^2-*test for Goodness of Fit*

Med χ^2-test Goodness of Fit kan du undersøge, om et observeret datasæt følger en forventet fordeling.

En mindre restaurant med et menukort bestående af 5 forskellige, men faste menuer plejer at have følgende ordrefordeling på disse:

menu 1: 30 %, menu 2: 25 %, menu 3: 20 %, menu 4: 15 % og menu 5: 10 %.

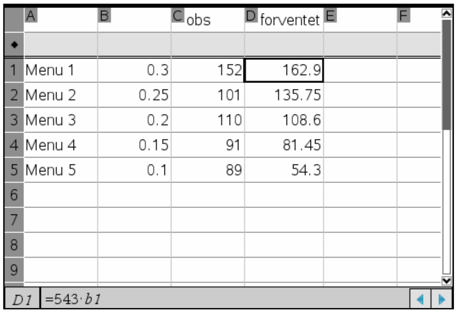
Restauranten foretager sine indkøb for at imødegå en efterspørgsel, der følger dette mønster. Imidlertid er man flere gange i den seneste tid løbet tør for menu 5, og man ønsker at afgøre, om det er en tilfældighed, eller om man skal revidere indkøbsplanerne.

I den seneste uge har man haft 543 gæster. Af disse bestilte 152 menu 1, 101 bestilte menu 2, 110 bestilte menu 3, 91 bestilte menu 4 og 89 bestilte menu 5.

Skal man revidere indkøbsplanerne?

Hypotesen H_0 er her, at ordrefordelingen i den sidste uge (stikprøven) ikke adskiller sig signifikant fra den sædvanlige ordrefordeling.
Dvs., at den forventede ordrefordeling blandt de 543 gæster kan beregnes vha. de givne procenter.

Opret et nyt Lister og Regneark væksted, tast oplysningerne ind og beregn de forventede værdier (med en celleformel):

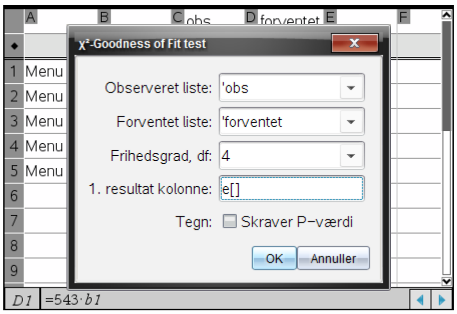


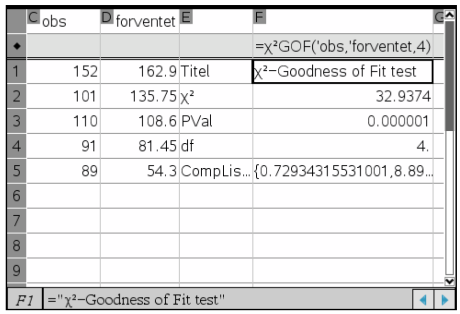
	A	B	C obs	D forventet	E	F
◆						
1	Menu 1	0.3	152	162.9		
2	Menu 2	0.25	101	135.75		
3	Menu 3	0.2	110	108.6		
4	Menu 4	0.15	91	81.45		
5	Menu 5	0.1	89	54.3		
6						
7						
8						
9						

D1 =543·b1

Vælg 4:Statistik ▸ 4:Statistiske tests... ▸ 7:χ^2 Goodness of Fit test.

Guiden forventer, at du giver navnet på en liste med observerede værdier (obs), en liste med forventede værdier og antallet af frihedsgrader (antal rækker - 1 = 4):





	C obs	D forventet	E	F
◆				=χ²GOF('obs,'forventet,4)
1	152	162.9	Titel	χ²–Goodness of Fit test
2	101	135.75	χ²	32.9374
3	110	108.6	PVal	0.000001
4	91	81.45	df	4.
5	89	54.3	CompLis...	{0.72934315531001,8.89...
6				
7				
8				
9				

F1 ="χ²–Goodness of Fit test"

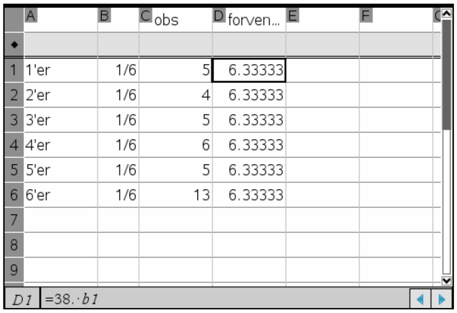
p-værdien er her meget lille (0.000001), så lille, at restauranten må tage deres indkøbsplaner op til revision.

Du har en mistanke om, at en af dine venner har en ”falsk” terning.

Derfor har du i al hemmelighed noteret udfaldet af alle vedkommendes kast med terningen gennem en hel aftens spil. Dine optegnelser viser, at terningen er endt på ”1” i alt 5 gange, ”2” i alt 4 gange, ”3” i alt 5 gange, ”4” i alt 6 gange, ”5” i alt 5 gange og ”6” i alt 13 gange.

Giver dine observationer anledning til at din mistanke bestyrkes?

Hypotesen H_0 er her, at terningen er “ægte”. Du forventer således en ligelig fordeling af øjentallene i de 38 observationer. Indtast oplysningerne i et Lister og Regneark værksted:

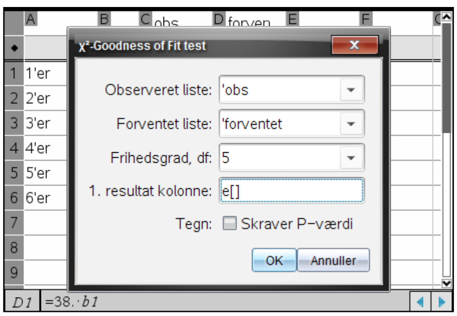


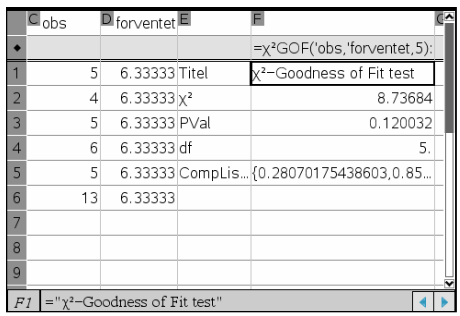
	A	B	C obs	D forven...	E	F
◆						
1	1'er	1/6	5	6.33333		
2	2'er	1/6	4	6.33333		
3	3'er	1/6	5	6.33333		
4	4'er	1/6	6	6.33333		
5	5'er	1/6	5	6.33333		
6	6'er	1/6	13	6.33333		
7						
8						
9						

D1 =38.·b1

Vælg 4:Statistik ▸ 4:Statistiske tests... ▸ 7:χ^2 Goodness of Fit test.

Guiden forventer, at du giver navnet på en liste med observerede værdier (obs), en liste med forventede værdier og antallet af frihedsgrader (antal rækker - 1 = 5):





	C obs	D forventet	E	F
◆				=χ²GOF('obs,'forventet,5):
1	5	6.33333	Titel	χ²–Goodness of Fit test
2	4	6.33333	χ²	8.73684
3	5	6.33333	PVal	0.120032
4	6	6.33333	df	5.
5	5	6.33333	CompLis...	{0.28070175438603,0.85...
6	13	6.33333		
7				
8				
9				

F1 ="χ²–Goodness of Fit test"

Med en p-værdi på 0.12 er der således ingen statistisk evidens mod 0-hypotesen.

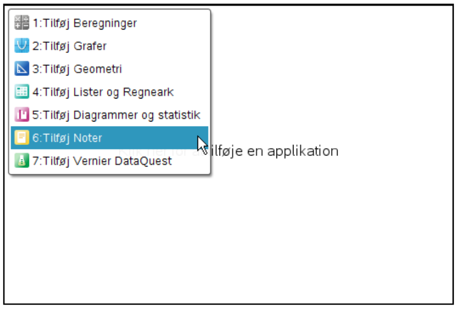
6 Noter

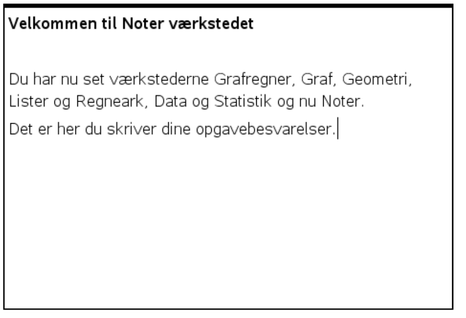
I værkstedet Noter kan du skrive og formatere den tekst, der skal ledsage din opgave. I teksten kan du indsætte formler, figurer og specialtegn

Indtastning af tekst

Opret et nyt dokument og tilføj et Noter værksted.

Tip
De almindelige genveje til *kopier* Ctrl +C og *indsæt* Ctrl + V kan også benyttes i TI-Nspire CAS. Markering sker ved at trække med musen.
Du kan således fx kopiere fra Beregninger til Noter.





At skrive tekst i Noter værkstedet går helt af sig selv ved at benytte computerens tastatur. Specialtegn indsætter du fra Tegn-fanen i sidepanelet (under Hjælpeprogrammer).

Indtastning af formler

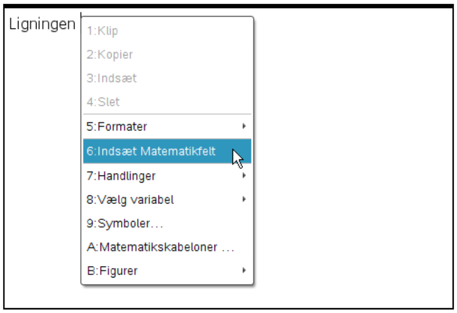
Indsæt et nyt Noter værksted med Ctrl + I. Du skal nu indtaste denne tekst i Noter:

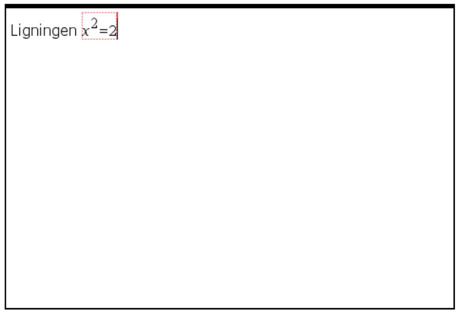
$$\text{Ligningen } x^2 = 2 \text{ har løsningen } x = \sqrt{2} \text{ eller } x = -\sqrt{2}$$

Teksten indeholder to matematikfelter, nemlig selve ligningen og løsningen. Start med at indtaste ordet "Ligningen" efterfulgt af mellemrum.

Tip
Genvejen til et matematikfelt er Ctrl+M

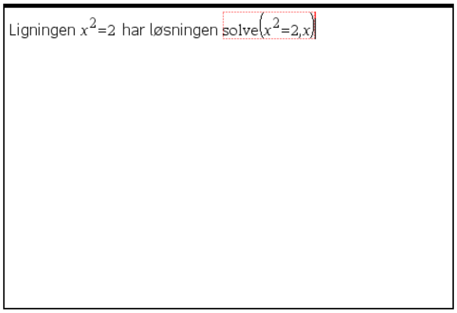
Højre-klik og vælg 6:Indsæt et matematikfelt, og skriv $x^2 = 2$ i feltet. Tryk på → for at komme ud af matematikfeltet.

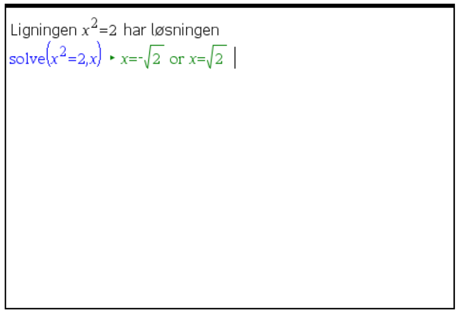




Skriv så “ har løsningen ”. Indsæt et nyt matematikfelt (Ctrl+M), hvori du indsætter kommandoen, der løser ligningen. Hertil kan du bruge 6:Beregninger ▸ 3:Algebra ▸ 1:Løs ligning

Tip
Hvis du har løst ligningen i et Grafregner værksted, kan du hente en kopi og indsætte denne. Matematikfeltet indsættes da automatisk.

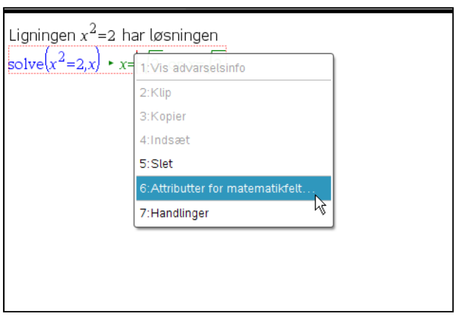


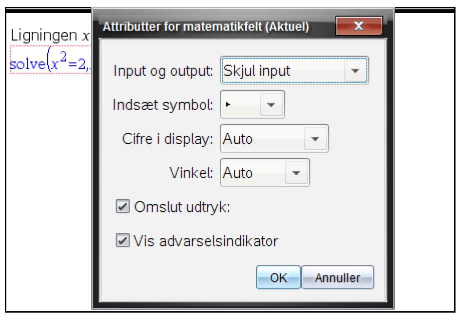


Tip
Du løser numerisk ved at taste Ctrl+Enter

Hvis du taster Enter mens du er i matematikfeltet, så vil TI-Nspire CAS løse ligningen og returnere løsningen (højre skærmbillede ovenfor).

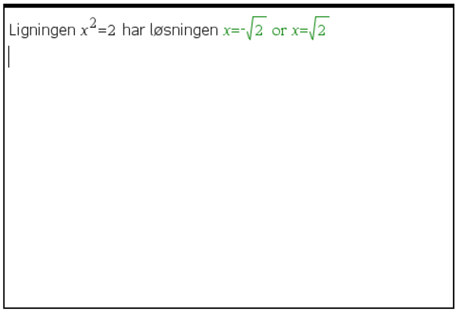
Højre-klik i matematikfeltet og indstil som vist nedenfor





Med skjult input ser resultatet således ud:

Tip
Alternativt kan du benytte 2+2= 1:Handlinger ▸ 3:Udregn deludtryk og udskrift med svar, (her undgår du, at udskriften er grøn).



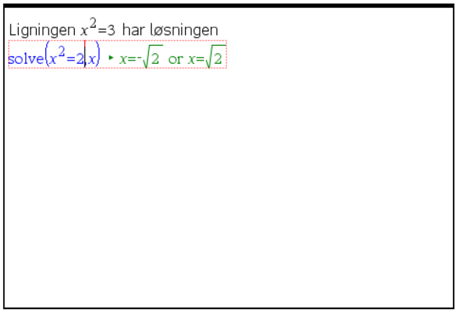
En af de store fordele ved at arbejde i Noter (fremfor Beregningsværkstedet) er, at du kan redigere i en indtastning uden at skulle lave en kopi.

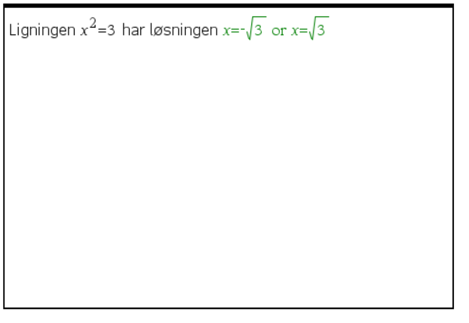
Du skal nu ændre teksten til

$$\text{Ligningen } x^2 = 3 \text{ har løsningen } x = \sqrt{3} \text{ eller } x = -\sqrt{3}$$

At ændre til $x^2 = 3$ går af sig selv. Den anden ændring er lidt mere kompliceret, da inputtet jo er skjult, men hvis du højre-klikker i matematikfeltet, så kommer inputtet til syne, og du kan redigere. Afslut med Enter:

Obs
Når du begynder at redigere input, så forvinder output.





Tip
Vælg layouttype 2

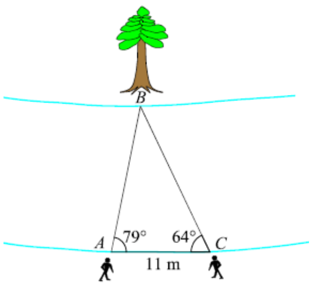
eller 3

i Sidelayout.

Hvis du placerer et Beregningsværksted og Noter i to nabovinduer kan du *trække* dine beregninger fra Beregningsværkstedet. Det er smart, hvis du vil lave pæne opgavebesvarelser.

En opgave løst i Noter

To personer bestemmer en flods bredde vha. et målebånd og en vinkelmåler. De to personer står med 11 meters afstand og måler sigtevinklerne A og C til et træ på den anden side af floden. Vinkel A måles til 79° og vinkel C til 64° (se figur)



a) Bestem $|BC|$

b) Bestem flodens bredde, dvs. højden fra B i trekant ABC

Nedenfor ser du opgaven løst i et Noter værksted:

Opgave i trigonometri

a) Bestem $|BC|$

Til bestemmelse af BC benyttes sinusrelationen

$\frac{\sin(A)}{BC}=\frac{\sin(B)}{AC}$

Først bestemmes ∠B:

∠B=180−∠A−∠B=$180-79-64 = 37$

− og de kendte størrelser indsættes i sinusrelationen

$\text{solve}\left(\frac{bc}{\sin(79.)}=\frac{11}{\sin(37)},bc\right) \Rightarrow bc=17.9422$

Dette viser, at $|BC|$ = 17.94.

b) Flodens bredde

Højden fra B's fodpunkt betegnes F. Da ΔBCF er retvinklet kan vi finde

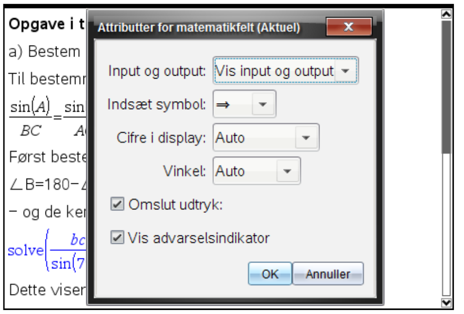
højden h således:

$\sin(C)=\frac{h}{BC}$. Tallene indsættes og der løses for h:

$\text{solve}\left(\sin(64)=\frac{h}{17.94},h\right) \Rightarrow h=16.1244$

Dvs., at flodens bredde er ca 16.1 m.

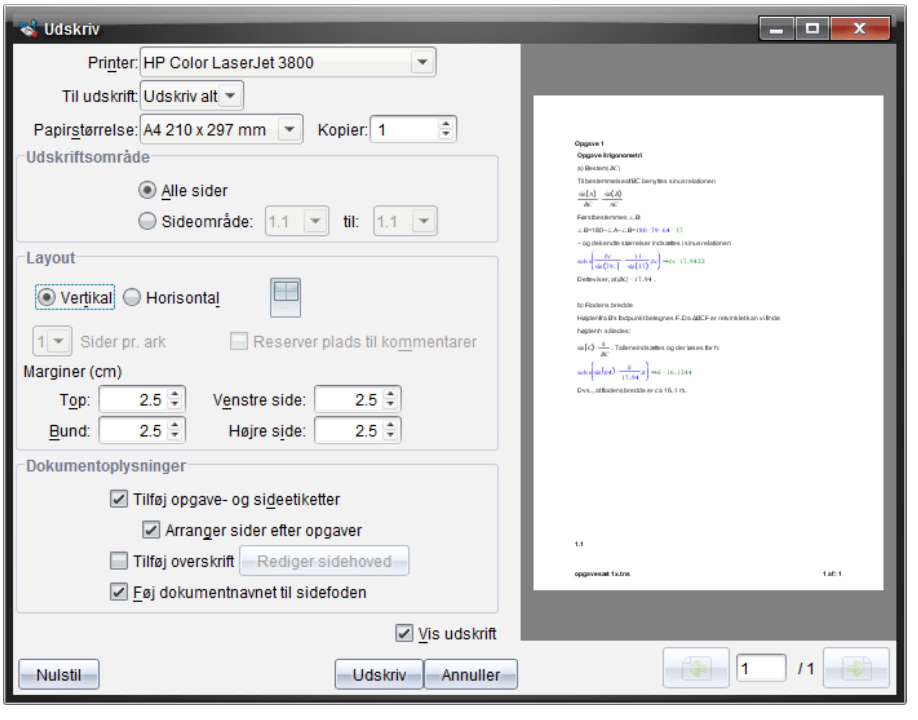
I løsningen af opgaven er kunbenyttet teknikker beskrevet ovenfor — dog lige bortset fra, at ▸ er ændret til ⇒. Det gør du ved at højre-klikke på det pågældende matematikfelt, vælge **Attributter for matematikfelt** og indstille i **Indsæt symbol**:



Tilbage er blot at få opgaven skrevet ud.

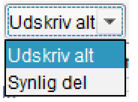
Udskrivning fra TI-Nspire CAS

Vælg Filer ▸ Udskriv... fra programmets menulinje, og print-dialogen åbner:



Her kan du vælge printer, hvad du vil udskrive, papirformat, orientering (vertikal eller horisontal) samt indstille marginer mm.

Specielt skal du være opmærksom på valget ‘Til udskrift’:



Vælger du her ‘Udskriv Alt’, så udskrives alt fra værkstederne. For ovenstående opgave, der er løst i et Noter-værksted, er ‘Udskriv Alt’ det oplagte valg.

Vælger du ‘Synlig del af skærmbillede’, får du udskrevet præcis det, du ser på skærmen.

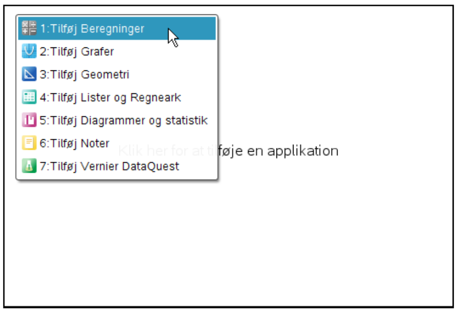
Hvad så, hvis din opgave fylder mere end én skærmfuld?
Du vil altid kunne se, om dette er tilfældet, da der i givet fald dukker scroll-bar op i arbejdsområdets højre side. Du kan så vælge at printe ad to omgange - eller du kan oprette et nyt værksted (af samme type) og flytte det overskydende hertil.

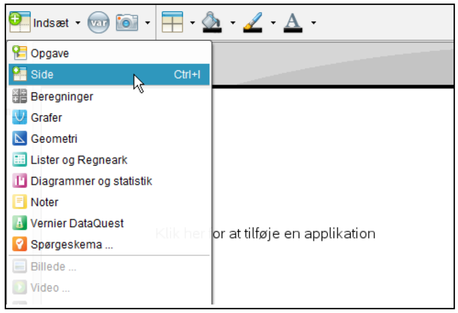
Indeholder din opgave opdelte sider med flere væksteder tilføjet, vil det være mest hensigtsmæssigt at udskrive sidevist - altså ned valget ‘Synlig del’ - og endda med horisontal orientering af arket.
Når ‘Synlig del’ er valgt, for du mulighed for at vælge, hvor mange sider (1, 4 eller 8) du vil placere på et ark.

7 Dokumentstyring

Et TI-Nspire CAS dokument (tns) består af en række opgaver, der igen består af en række sider.
Når du starter TI-Nspire CAS vil et nyt dokument blive oprettet. Dette dokument indeholder én opgave (Opgave 1) med én side, som skal have tilføjet et værksted. Med Indsæt - knappen indsætter du flere sider i den aktuelle opgave eller en helt ny opgave:

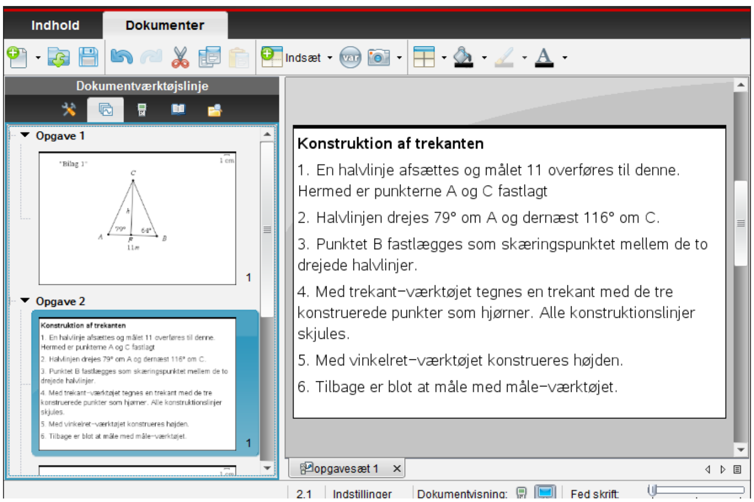
Tip
Ctrl+I er en meget nyttig genvej til indsættelse af sider.





På skærmbilledet nedenfor ser du 2.1 nederst i vinduet. Dette viser, at du aktuelt befinder dig i Opgave 2 side 1.

Tip
Du flytter rundt på sidene i sidesorteren ved blot at trække til den ønskede placering.



I kolonnen til venstre ser du siderne i det aktuelle dokument vist som miniaturer. Dette gør det meget bekvemt at bladre i dokumentet: Klik på en af miniaturerne og brug piletasterne til at bladre op og ned. Med Enter åbner og lukker du en Opgave.

I miniature visningen kan du ændre på rækkefølgen af siderne: Naviger til den side, du vil flytte, og træk siden hen, hvor du vil have den. Du kan også flytte sider mellem to opgaver, men det kræver, at der ikke er sammenfald af beskyttede variablenavne.
Endvidere kan du slette den aktuelle side i miniaturevisningen med DEL — en handling du naturligvis kan fortyde med .

Det er vigtigt at forstå, hvordan TI-Nspire CAS håndterer variabeldeling: Alle variabler, du opretter inden for en opgave, deles af alle de værksteder opgaven har fået tilføjet — uanset i hvilket værkted variablen er oprettet. Ændrer du en variabel i et af værkstederne, vil denne ændring automatisk slå i gennem i alle værksteder.
Ved ændring af en variabel vil alle værksteder blive opdateret med undtagelse af Beregninger, hvis historik er upåvirket af ændringer i andre værksteder. Men genberegner du en variabel i Beregninger, der er ændret i et andet værksted, så vil du naturligvis se ændringen.

Opretter du en ny opgave, vil ingen variabler fra tidligere opgaver være tilgængelige.

Gem et dokument

Du gemmer dit dokument ved at trykke på knappen . Du vil altid få vist den mappe, du sidst gemte i. Gemmer du under det foreslåede filnavn **Dokument1.tns** foreslås filnavnet **Dokument2.tns** næste gang. Det foreslåede filnavn kan du selvfølgelig ændre efter behag.

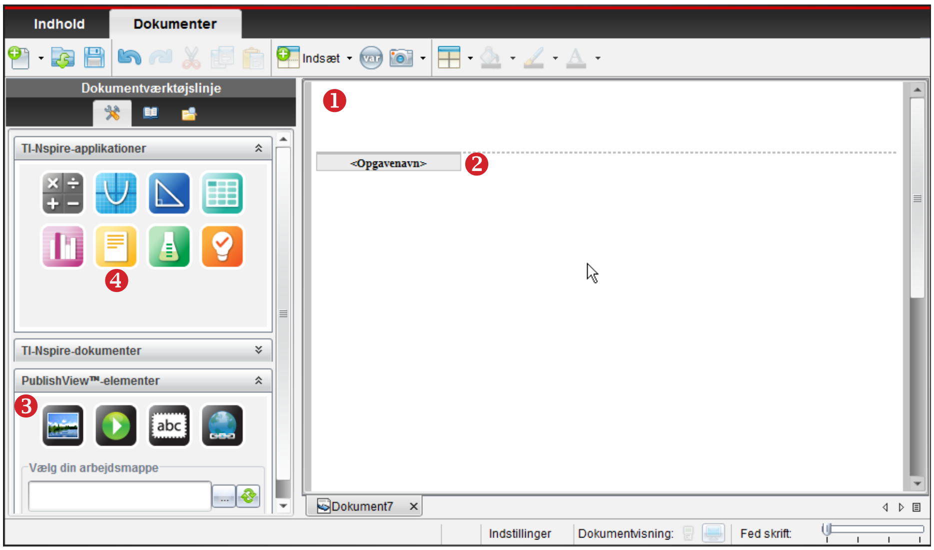
8 PublishView

Obs
Du kan ikke sende et PublishView dokument til en håndholdt.
En PublishView fil kan konverteres til en tns fil, der kan sendes.

PublishView er en ny feature i TI Nspire CAS, hvor du kan lave layout af dine opgaver. Du kan konvertere et eksisterende TI Nspire CAS dokument til et PublishView dokument, men når du laver opgaver, så kan du lige så godt starte PublishView med det samme, og løse opgaven i de værksteder du indsætter i PublishView.

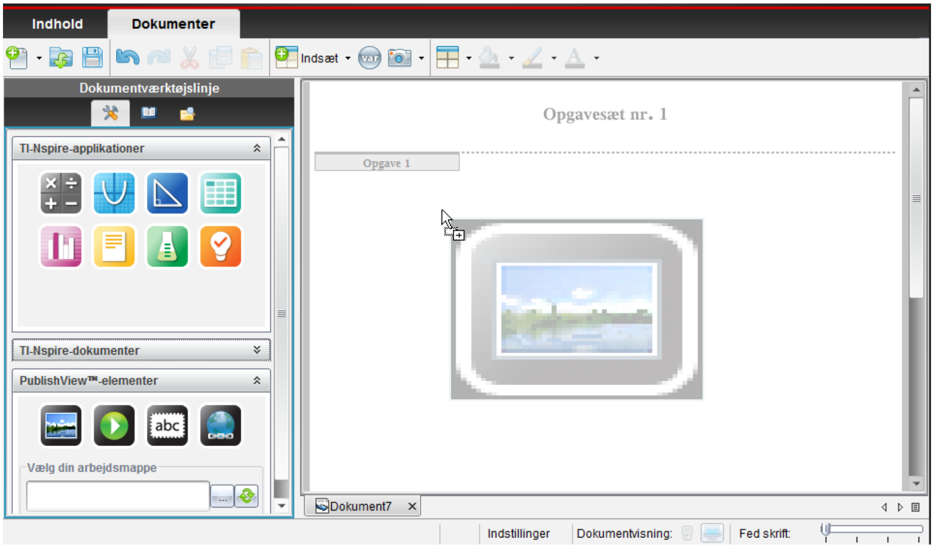
I det følgende vil vi bygge en lille opgavebesvarelse op i PublishView, så du kan få en fornemmelse af, hvordan det foregår. Har du først prøvet det et par gange, vil det være helt naturligt for dig at arbejde i PublishView.

Vælg menupunktet Filer ▸ Nyt PublishView Dokument fra programmets menulinje, og din skærm vil se ud i stil med

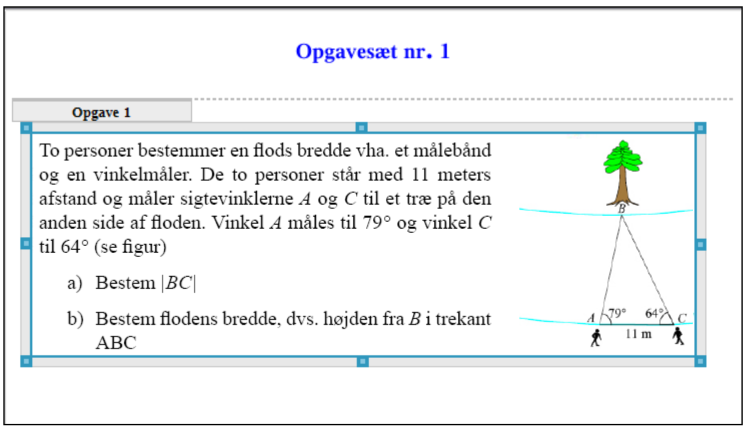


I feltet ❶ kan du skrive en overskrift til opgavesættet, og klikker du på knappen ❷, kan du skrive, hvilken opgave der er tale om.

Hvis du har opgavesættet liggende i pdf-format, kan du sakse teksten til den opgave, du skal løse, med et klippeværktøj, og indsætte dette som billede i PublishView:
Træk Billed-ikonen ❸ fra sidepanelet ud i arbejdområdet:

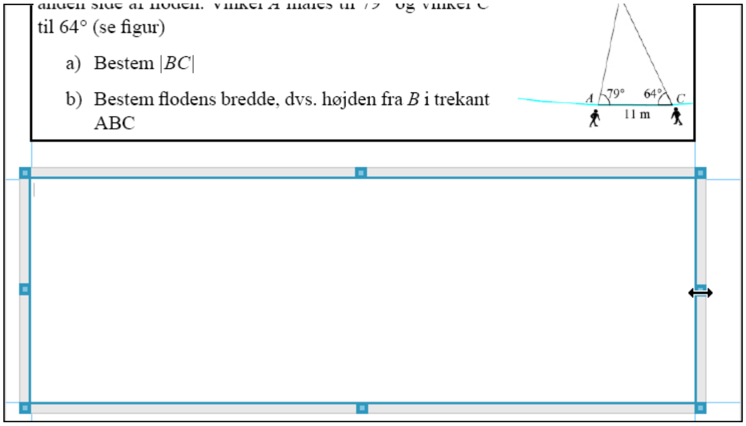


Slip, og udpeg det ønskede billede i den dialog der kommer frem. Billedet indsættes i PublishView, og du skal billedets størrelse ved at trække i de blå håndtag rundt om billedet:



Når du klikker uden for billedet kommer der en sort ramme udenom. Disse udskrives som standard ikke.

Opgaven løses nemmest i et Noter værksted, så træk et Noter Værksted ❹ til arbejdsområdet i PublishView:

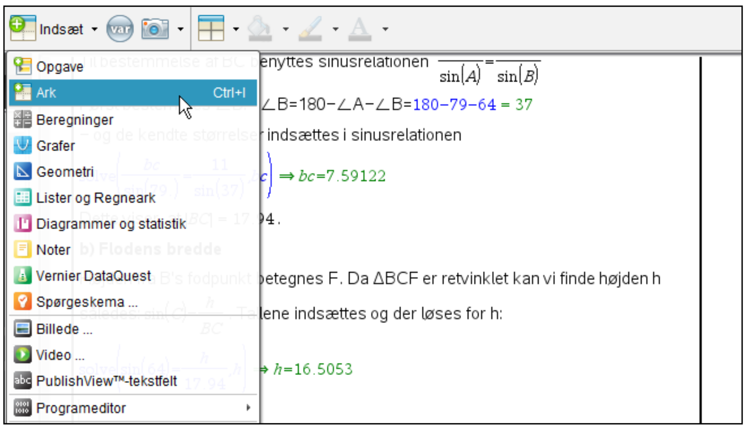


Reguler Noter værkstedets størrelse ved at trække i håndtagene og flyt om nødvendigt rammen, så du får en lige venstrekant.

Nu kan du skrive opgaven i Noterværkstedet præcis som du gjorde i forrige afsnit. Så snart du klikker inde i Noter værkstedet, ser du de velkendte menuer i sidepanelet.

Er rammen ikke stor nok til opgaven, så klik på kanten af rammen. Herved kommer håndtagene igen til syne, og du kan udvide ved at trække nedad, men ikke længere end til sideskiftet.
Er opgaven større end den kan rummes på en side, så skal du indsætte en ny side ved menuvalget Indsæt ▸ Ark:

Obs
Det er også her, du indsætter en ny opgave i dit PublishView dokument.



Det færdige opgave kommer til at se sådan ud i PublishView

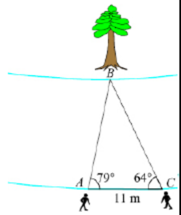
Opgavesæt nr. 1

Opgave 1

To personer bestemmer en flods bredde vha. et målebånd og en vinkelmåler. De to personer står med 11 meters afstand og måler sigtevinklerne A og C til et træ på den anden side af floden. Vinkel A måles til 79° og vinkel C til 64° (se figur)

a) Bestem $|BC|$

b) Bestem flodens bredde, dvs. højden fra B i trekant ABC



a) Bestem $|BC|$

Til bestemmelse af BC benyttes sinusrelationen $\frac{BC}{\sin(A)}=\frac{AC}{\sin(B)}$

Først bestemmes ∠B: ∠B=180−∠A−∠B=180−79−64 = 37

− og de kendte størrelser indsættes i sinusrelationen

$\text{solve}\left(\frac{bc}{\sin(79.)}=\frac{11}{\sin(37)},bc\right) \Rightarrow bc=7.59122$

Dette viser, at $|BC|$ = 17.94.

b) Flodens bredde

Højden fra B's fodpunkt betegnes F. Da ΔBCF er retvinklet kan vi finde højden h

således: $\sin(C)=\frac{h}{BC}$. Tallene indsættes og der løses for h:

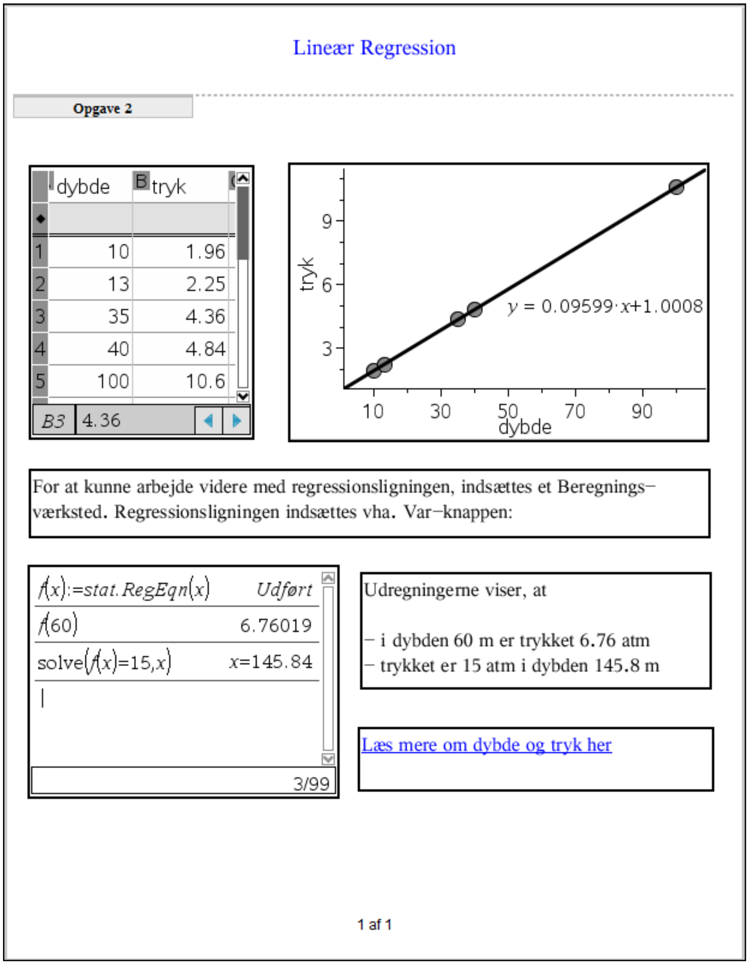
$\text{solve}\left(\sin(64)=\frac{h}{17.94},h\right) \Rightarrow h=16.5053$

1 af 1

I eksemplet ovenfor har du kun benyttet ét PublishView element og én værksted. I andre sammenhænge kan du få brug for andre og flere værksteder og PublishView elementer.

Det eksempel, du nu skal se, indeholder værkstederne: Lister og Regneark, Diagrammer og Statistik, Beregninger, og PublishView elementerne: Tekstfelt og Hyperlink.

Prøv selv at genskabe dokumentet nedenfor — ikke ved at kopiere gammelt arbejde til PublishView, men helt fra bunden af. Det er sådan du kommer til at arbejde med opgaveløsning i TI-Nspire CAS.



Den færdige opgave kan du udskrive med menuvalget Filer ▸ Udskriv...

9 Variabler

I arbejdet med TI-Nspire CAS er det meget vigtigt at forstå, hvad variabler er, hvordan de håndteres samt at kende betydningen af definerede og ikke-definerede variabler.

I dette afsnit benyttes som eksempel toppunktsformlen for en parabel

$$T = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right)$$

hvor a, b og c er koefficienterne i parablens ligning $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, og $d = b^2 - 4a \cdot c$ er diskriminanten.

Gem talværdier i variabler

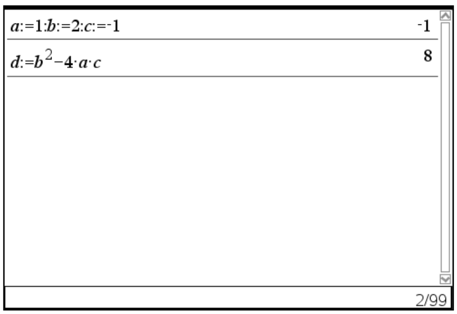
I det konkrete eksempel, $y = x^2 + 2x - 1$, er $a = 1, b = 2$ og $c = -1$. På TI-Nspire CAS kan du gemme talværdier i navngivne variabler:

Tip
Alternativt kan du lave tildelingen således $1 \rightarrow a$, hvor pilen findes i symbolpaletten - eller du kan bruge genvejen =: (lig med kolon)

Et 1-tal gemmes i variablen a ved at taste: $a := 1$, og tilsvarende for de andre variabler.

Du kan også gemme værdien af et udtryk i en variabel, fx kan du gemme værdien af $b^2 - 4a \cdot c$ i en variabel med navnet d. Du skal blot taste $d := b^2 - 4a \cdot c$

Tip
Du behøver ikke at taste Enter efter hver tildeling, men du må gerne.
Det bliver mere overskueligt, hvis tildelingerne adskilles af et kolon.

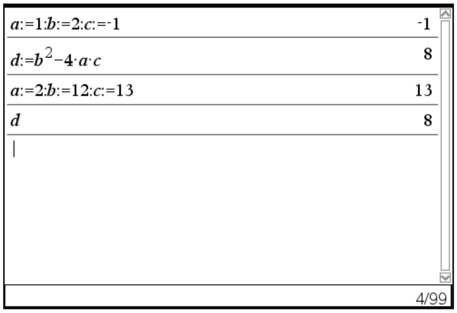


Obs
Gemmer du en ny værdi i en variabel, vil den gamle værdi blive slettet. Indholdet af en variabel kan ses ved blot at skrive variablens navn efterfulgt af Enter.

Det er vigtigt at skrive gangetegn mellem *a* og *c* i udtrykket $b^2 - 4a \cdot c$. TI-Nspire CAS genkender ikke underforstået multiplikation. Udelader du gangetegnet, opfattes *ac* som navnet på en variabel. Derimod behøver du ikke at skrive noget gangetegn mellem 4 og *a* — her benyttes underforstået multiplikation. Kravene til et variabelnavn gør dette muligt, idet et variabelnavn skal starte med et bogstav

Du kan se, at det er en værdi, der er blevet gemt i variablen *d*, nemlig tallet 8. Det betyder, at selvom du ændrer værdierne af *a*, *b* og *c*, vil *d* forblive uændret.
Ændrer du de værdier, der er gemt i variablerne *a*, *b* og *c* til fx $a = 2$, $b = 12$ og $c = 13$, og checker *d*'s værdi, ser du, at denne er uændret fra den foregående beregning:

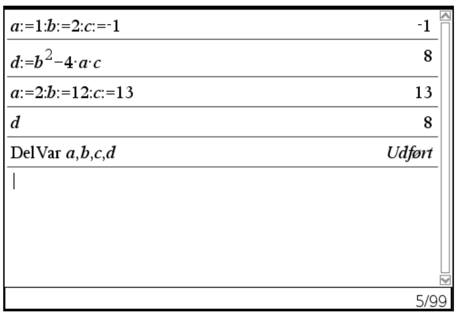
Tip
Hent den øverste linje i historikken, og ret den til med de nye værdier.



Slet variabler

Du skal nu lave det hele en gang til, men i omvendt orden. Først skal du slette de værdier, *a*, *b*, *c* og *d* har fået tildelt. Du kan nemt klare sagen ved at vælge 1:Handlinger ▸ 3:Slet variabel — eller blot skrive kommandoen *DelVar* direkte:

Tip
Menupunktet ▸ Rens a-z vil også klare sagen. Denne kommando sletter alle 1-bogstavs variabler.

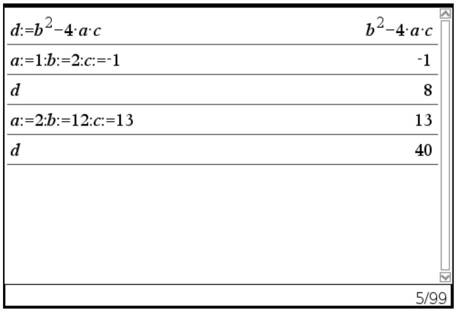


Gem formler i variabler

Nu er variablerne *a*,*b* og *c* udefinerede, og når du igen udfører tildelingen

$$d := b^2 - 4a \cdot c$$

er det udtrykket $b^2 - 4a \cdot c$, der gemmes i *d* og ikke blot værdien af udtrykket. Herefter vil *d* kun få en værdi, hvis du tildeler *a*, *b* og *c* værdier, og værdien af *d* vil ændres, hvis du ændrer værdien af *a*, *b* eller *c*:



En ulempe er naturligvis, at så snart du tildeler værdier til *a*, *b* og *c*, vil du ikke længere umiddelbart kunne se, hvilken formel der er gemt i *d* — det kan du kun, hvis *a*, *b* og *c* er udefinerede.

Midlertidig tildeling

Slet variablerne *a*, *b* og *c* med kommandoen *DelVar a,b,c*. Beder du nu om at få *d* udregnet, svarer maskinen ved at give dig formlen, der er gemt i *d* — se skærmbilledet nedenfor.

Du kan lave en midlertidig tildeling af værdier til variablerne i *d* og beregne værdien af *d* ved at skrive:

$$d \,|\, a = 1 \text{ and } b = 2 \text{ and } c = -1$$

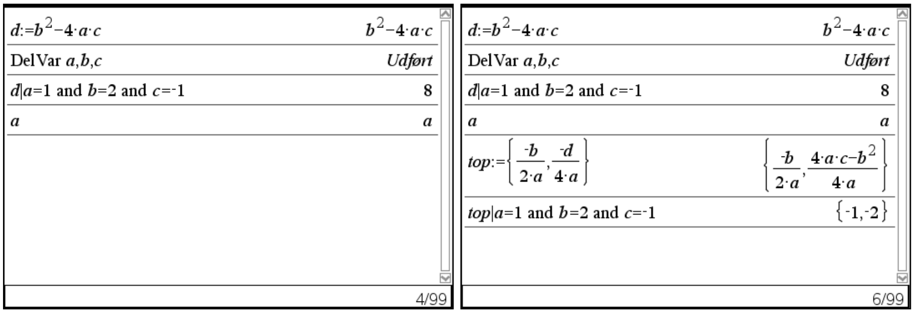
Efter denne midlertidige tildeling kan du let checke, at du stadig kan fremkalde formlen i *d*, samt at *a*, *b* og *c* er udefinerede (venstre skærmbillede nedenfor)

For at lave en formel, der bestemmer toppunktets koordinater, behøver du nu blot at taste følgende:

$$top := \left\{-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right\}$$

De krøllede parenteser { og }, er vigtige at få med, men betydningen skal du ikke bekymre dig om lige nu.

Herefter skal du blot lave en midlertidig tildeling af værdier til variablerne i formlen *top* for at beregne toppunktets koordinater i et konkret eksempel:

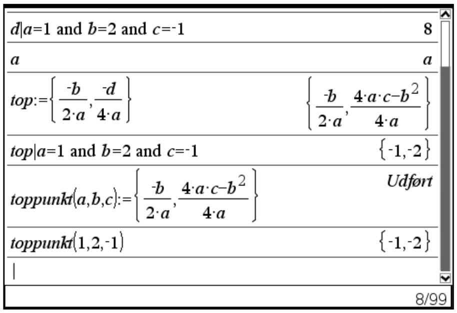


En brugerdefineret funktion

Toppunktsformlen kan implementeres som en brugerdefineret funktion af 3 variabler. I Beregninger skriver du:

$$toppunkt(a,b,c) := \left\{-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4a\cdot c}{4a}\right\}$$

Herved defineres en funktion med navnet *toppunkt*. For at bestemme toppunktet for parablen $y = x^2 + 2x - 1$, indtaster du toppunkt(1,2,–1):



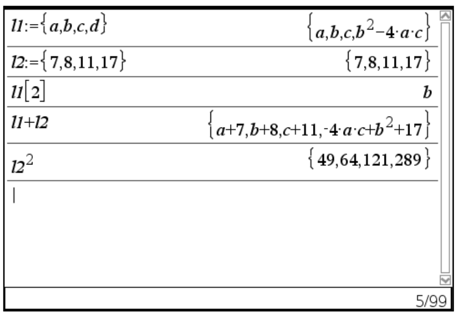
Lister

I ovenstående implementation af toppunktsformlen satte du krøllede parenteser om toppunktets koordinater — du lavede det, der kaldes en liste.

En liste er en samling af objekter (tal, udtryk, strenge), som ikke nødvendigvis er relaterede. Som mængder angives lister med krøllede parenteser og de enkelte elementer separeres af et komma, men til forskel fra mængder, kan en liste indeholde dubletter.

Lister kan indtastes manuelt eller være resultat af anvendelse af en operation, der returnerer en liste - fx *zeros*, som du stiftede bekendtskab med tidligere. Nedenfor er vist nogle eksempler på lister:

Tip
Læg mærke til, at formlen *d* indsættes ved udregningen.

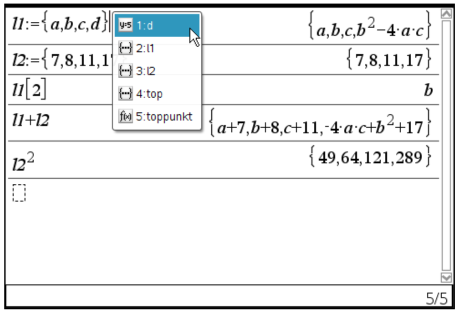


På skærmbilledet er vist, hvordan du kan trække et specifikt element ud af en liste. Du kan regne på lister præcis som på tal herunder benytte alle standardfunktioner, selvom det naturligvis stiller visse krav til listens elementer.

Oversigt over variabler

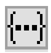
Hvis du har arbejdet dette afsnit igennem i samme dokument, så har du haft ganske mange variabler i sving: Simple variable, formler, funktioner og lister. Ingen simple variable har overlevet — *a, b* og *c* blev jo slettet med DelVar, så tilføj lige en enkelt, fx $x:=1$.

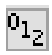
Du kan få en oversigt over de variabler, du har i sving, ved at taste 



Af variabellisten fremgår, at der pt. er 5 variabler i brug. Af piktogrammerne foran variabelnavnene kan du se, hvilken type variabler, der er tale om

 en formel

 en liste

 en simpel variabel

 en funktion

Du kan benytte  - tasten til at indsætte (lange) variabelnavne — det er langt hurtigere end at skrive dem. Du piler blot ned til (eller klikker på) den variabel, du vil indsætte, og taster Enter.
Lange variabelnavne møder du, hvis du fx har lavet en regression i Lister og Regneark, og skal bruge et eller flere af resultaterne i Beregninger værkstedet.

10 Ligninger og uligheder

Du har allerede set nogle eksempler på såvel symbolsk som numerisk ligningsløsning, men der er meget mere at se på i den forbindelse:

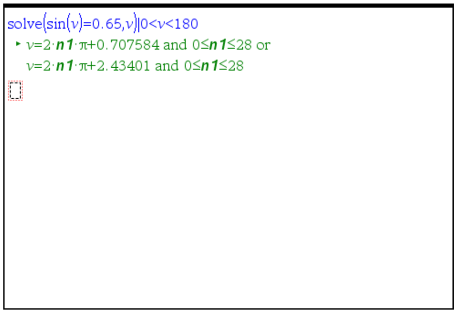
- trigonometriske ligninger
- to ligninger med to ubekendte
- ligninger med parametre
- numerisk nulpunktsbestemmelse
- uligheder

Trigonometriske ligninger

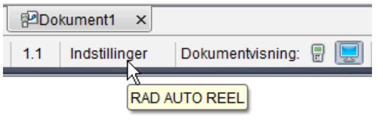
Løs ligningen $\sin(v) = 0.65$, hvor $0° < v < 180°$

Indsæt et Noter værksted og løs ligningen med betingelsen $0 < v < 180$:

Tip
Det er ikke sikkert, at du får ***n*1** i løsningen. Næste gang, du løser en ligning af denne type, udtrykkes løsningen ved ***n*2**. Osv. Indtil ***n*255**, hvor der startes forfra.



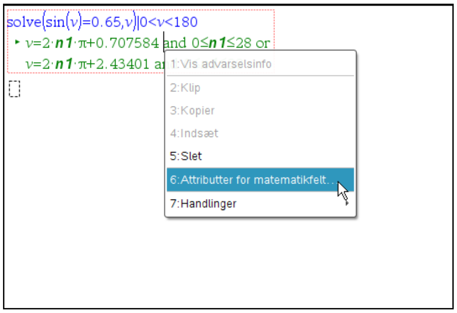
Hvis du får et resultat, som det du ser i skærmbilledet ovenfor, er det fordi din TI-Nspire CAS er indstillet til at regne i radianer.
Du kan let checke din indstilling ved holde markøren over feltet Indstillinger :



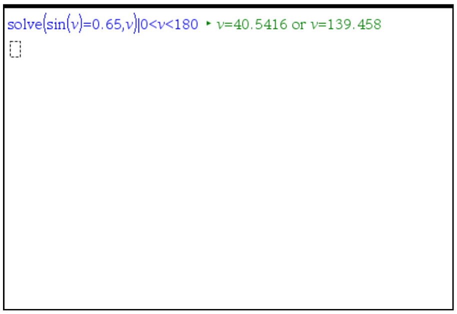
Det er meget nemt at få ændret resultatet til grader i Noter:

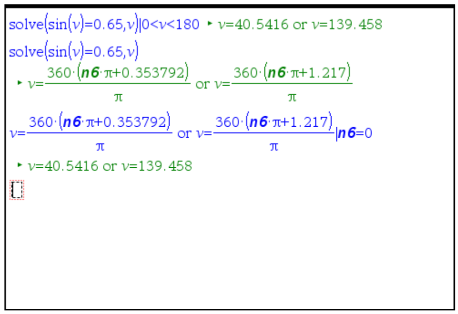
Højreklik på resultatet og vælg 6:Attibutter for matematikfelt, og skift til grader i den dialog der popper op:

Tip
Du kan ændre indstillingerne mere permanent ved at dobbelt-klikke på 'Indstillinger' i statuslinjen og ændre Vinkel til grader (i fanen Generelt)



— og du får det ønskede resultat (venstre skærmbillede)





Tip
Du kan også hente **n** fra symbolpaletten — eller skriv @n5, hvor @ fortæller, at der kommer et specialtegn.

Uden betingelsen $0<v<180$ ser løsningen lidt underligt ud, men viser, hvordan TI-Nspire CAS tackler en ligning med uendelig mange løsninger. Variablen ***n*6** står for en heltallig konstant.
Løsningerne i intervallet $0<v<180$ finder du så ved at sætte ***n*6** = 0. Det klarer du sådan: Kopier løsningerne til et nyt matematikfelt og tilføj |***n*6** = 0, idet du også kopierer og indsætter ***n*6**, som ikke er en almindelig bogstavvariabel.

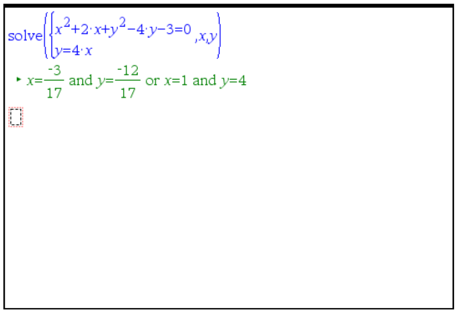
To ligninger med to ubekendte

Tip
Hvis du ikke bruger skabelonen til indtastningen, skal du skrive system(ligning1, ligning2).

Løs ligningssystemet

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y - 3 = 0 \quad \wedge \quad y = 4x$$

Geometrisk svarer opgaven til at finde skæringspunkterne mellem en cirkel og en linje. Du indtaster nemmest ved at benytte skabelonen for to ligninger med to ubekendte. Her er ligningssystemet løst i et Noter værksted:



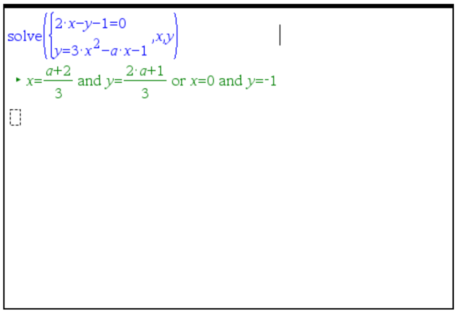
Ligninger med parametre

Måske har det undret dig, at du altid skal skrive, hvilken eller hvilke variabler du vil løse ligningen med hensyn til. Det hænger sammen med, at TI-Nspire CAS også kan håndtere ligninger med parametre:

Løs ligningssystemet

$$2x - y - 1 = 0 \quad \wedge \quad y = 3x^2 - a \cdot x - 1$$

Geometrisk svarer denne opgave til at finde skæringspunktet mellem en ret linje og en parabel. Indtast som vist nedenfor:

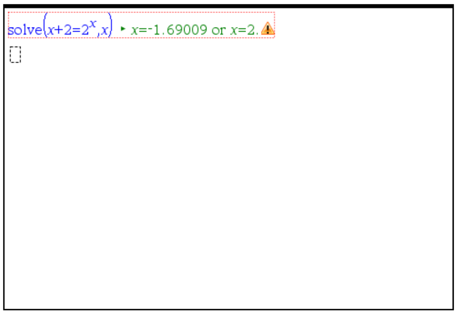


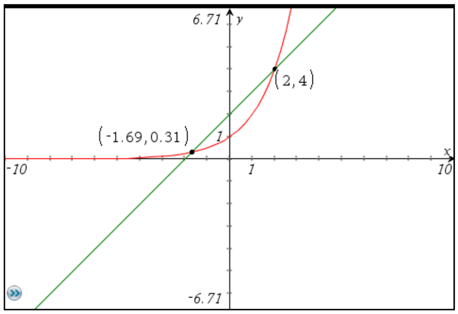
Numerisk nulpunktsbestemmelse

Løs ligningen $x + 2 = 2^x$

Hvis du løser ligningen i et Noter værksted, vil du se en lille advarselstrekant. Klikker du på denne, vil du se, at advarslen skyldes, at der kan være flere løsninger.

Tip
Du kan styre **solve** med et gæt på løsningen, fx solve(x+2= 2^x,x = 1)





Tip
Du kan også styre **nsolve** med et gæt på løsningen. Det er specielt nyttigt, hvis **solve** helt må opgive at komme med en løsning, og du ved, at der er en.

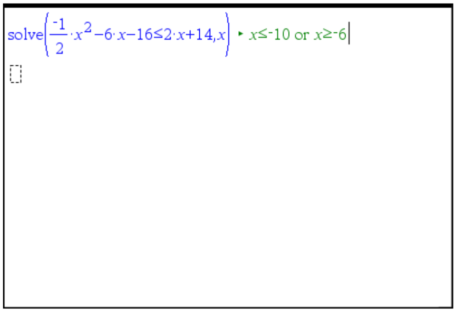
Læg mærke til, at TI-Nspire CAS opgiver at regne symbolsk. I den slags situationer er det klogt at bruge grafværktøjet for at se, om alle løsninger er fundet.

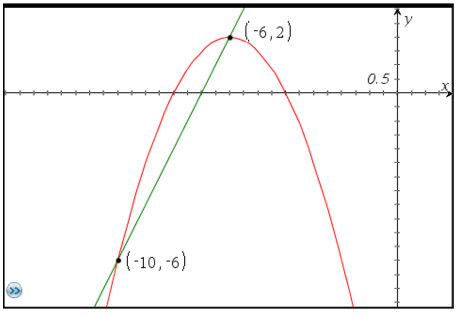
Uligheder

Du kan også løse uligheder vha. solve-kommandoen:

Løs uligheden $-\frac{1}{2}x^2 - 6x - 16 \leq 2x + 14$

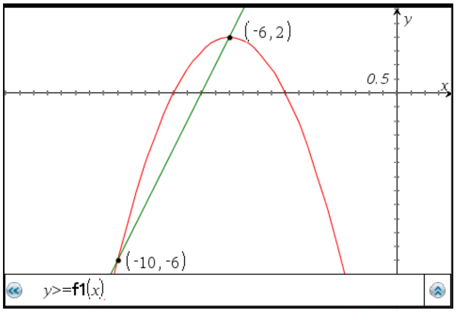
Uligheden indtastes præcis som en ligning — blot skal du anvende et ulighedstegn i stedet for et lighedstegn. På det højre skærmbillede ser du en grafisk illustration af løsningen:

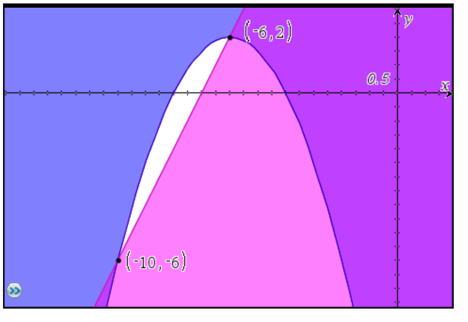




Du kan lave den grafiske illustration af løsningen endnu bedre ved at indtaste uligheden *y>=f1(x)* og dernæst uligheden *y<=f2(x)*:

Obs
Du skal slette indholdet i indtastningslinjen før du kan skrive y>=f1(x).
Tryk på for at se de uligheder, der er tastet ind.





Det lilla område markerer da løsningsområdet, hvor du er over parablen, men under linjen.

11 Funktioner

Du har allerede set flere eksempler på, hvordan funktioner håndteres. Hovedsagelig har du foretaget indtastningen i graffeltet og refereret til funktionerne via det navn, *f*1, *f*2, osv. funktionen således får. I dette afsnit vil du lære at

- definere funktioner i Beregningsværkstedet
- bestemme grænseværdier
- bestemme differentialkvotienter og finde tangenter
- finde stamfunktioner og benytte disse til arealbestemmelse

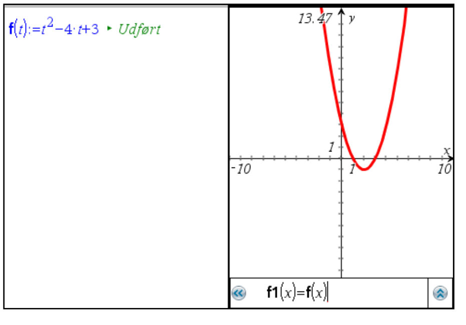
Funktioner i Beregninger-værkstedet

I indtastningsfeltet i Grafer *skal* du bruge x som uafhængig variabel. Definerer du en funktion i Beregningsværkstedet (eller i Noter), er der frit valg af navn til den uafhængige variabel. En definition af funktionen $f(t) = t^2 - 4t + 3$ vil i Beregningværkstedet (eller i Noter) se således ud:

$$f(t) := t^2 - 4t + 3$$

Indsæt et Noter væksted og split skærmen i to med et Grafværksted til højre. Du splitter med knappen .

Grafen tegnes kan herefter tegnes i Grafer ved at indtaste f1(x) = *f*(*x*) i graffeltet.

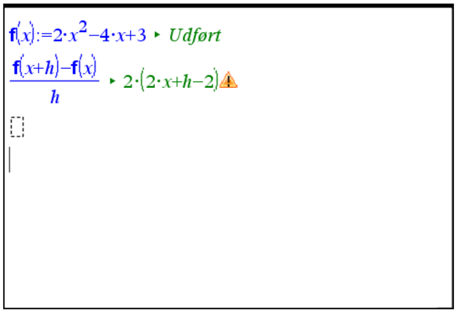


Grænseværdier

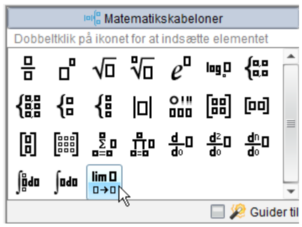
En funktion f er givet ved $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$. Bestem grænseværdien af differensbrøken for f, når h går mod 0.

Definer funktionen f i Noter ved $f(x) := 2x^2 - 4x + 3$ og beregn differensbrøken:

Obs
Der er en god pointe i advarslen. Differensbrøken er kun defineret for $h \neq 0$, mens det reducerede udtryk er defineret for alle h.

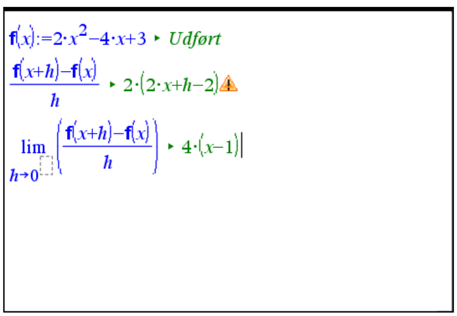


Grænseværdier bestemmer du vha.



Tip
I den valgfrie pladsholder skal du skrive +, hvis du vil finde grænseværdien fra højre, og –, hvis du vil finde grænseværdien fra venstre.

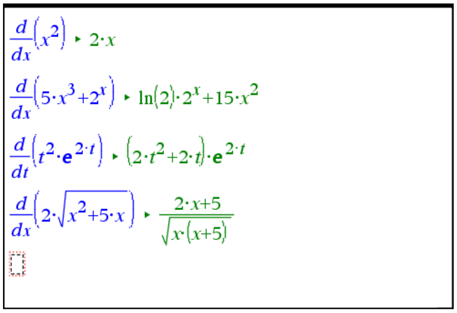
der vil indsætte skabelonen $\lim\limits_{\square \to \square} \square$. En af pladsholderne i skabelonen er grå — det betyder, at det er valgfrit, om du skriver noget i denne.

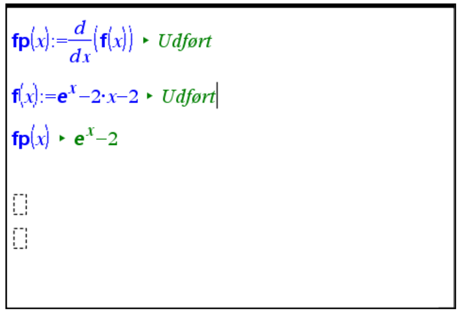


Differentialregning

Differentialkvotienter bestemmer du vha. skabelonen . Først indtaster du, hvilken variabel der skal differentieres med hensyn til, og dernæst det udtryk, der skal differentieres.

På skærmbilledet til venstre kan du se nogle eksempler





Det er fornuftigt at definere en ny funktion ved (se højre skærmbillede)

$$fp(x) := \frac{d}{dx}(f(x))$$

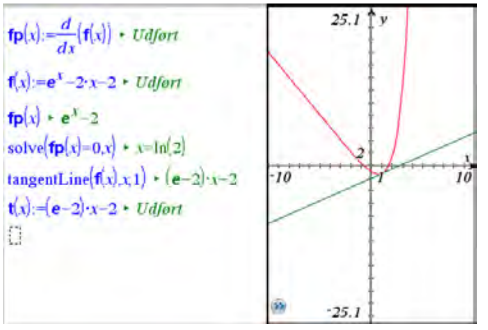
Så vil *dp* altid rumme den afledede af funktionen *f*, og *f* kan jo skifte indhold. Herefter kan du arbejde med *dp* som med enhver anden funktion — herunder fx bestemme nulpunkter.

En funktion *f* er givet ved forskriften

$$f(x) = e^x - 2x - 2$$

Bestem de punkter, hvor *f* har vandret tangent, og bestem tangentligningen i punktet med førstekoordinaten 1.

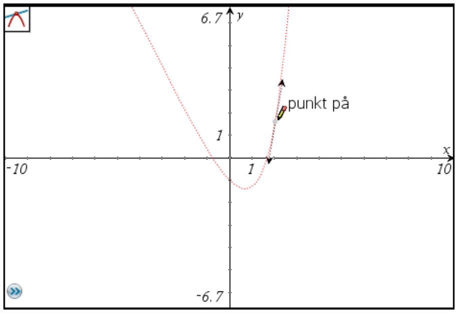
Første del klares ved at løse ligningen $f'(x) = 0$. Til den anden del, skal du benytte kommandoen *tangentline*$(f(x), x, 1)$, der umiddelbart giver dig et funktionsudtryk for tangenten til grafen for f i punktet med x-koordinaten 1.



I sidste linje er vist, hvordan tangenten kan defineres som en funktion af x. Opgaven er løst i en opsplittet skærm med et Noter værksted til venstre og et Graf værsted til højre.

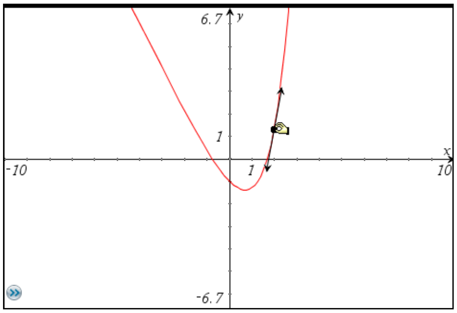
Dynamisk tangent

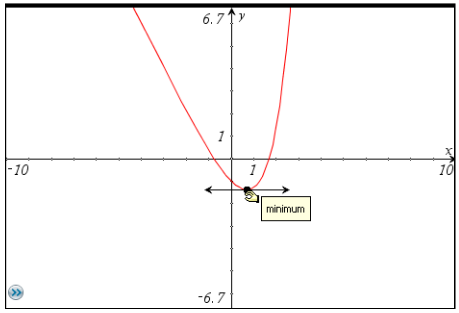
I Graf værkstedet finder du et stærkt tangentværktøj, hvormed du kan klistre en dynamisk tangent på en graf:
Tegn først grafen for f i Grafværkstedet. Vælg så 7:Punkter og linjer ▸ 7:Tangentlinje. Klik i et punkt på grafen, og en tangent tegnes i dette punkt — skærmbilledet herunder viser situationen umiddelbart før punktet placeres:



Grib punktet, og træk det langs kurven:

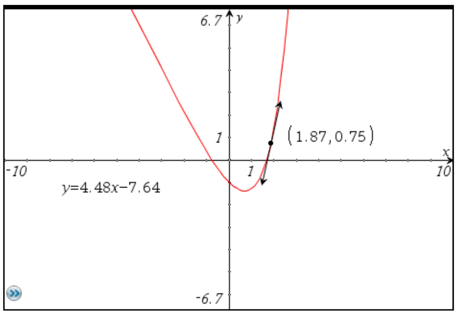
Tip
Passerer du interessante punkter undervejs, så bliver du underrettet.





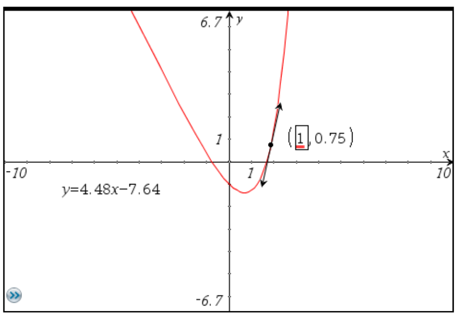
Du kan få vist tangentens ligning og punktets koordinater således: Vælg 1:Handlinger ▸ Koordinater og ligninger. Klik på punktet og tangenten, og flyt tangentligningen passende:

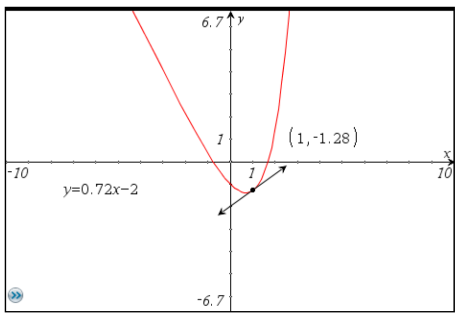
Husk
Du ændrer til 2 decimaler ved at placere markøren over koordinaterne, og taste + eller –



Du kan ændre punktets koordinater direkte:

Husk
Du ændrer en koordinat ved at dobbeltklikke på den, og indtaste den nye værdi.

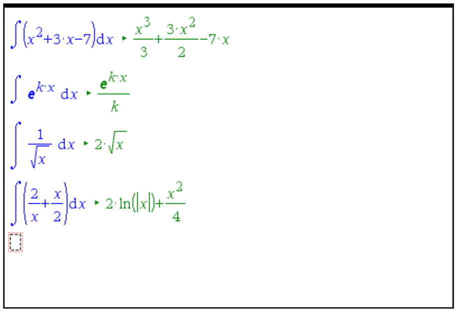




Integralregning

Stamfunktioner bestemmer du ved at benytte skabelonen $\int \square d\square$.

Først indtaster du, hvilket udtryk der skal integreres og dernæst den variabel der skal integreres med hensyn til. Her ser du nogle eksempler:



En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 3x^2 - 21x + 30$$

Bestem den stamfunktion til f, der går gennem punktet $P(2, 42)$.

Start med at definere f. Du kan ikke benytte navnet F for en stamfunktion til f, da TI-Nspire CAS ikke skelner mellem store og små bogstaver i variabelnavne. Brug fx navnet *sf* i stedet.

Obs
Ved at bruge $\int($ fra kataloget kan du få integrationskonstanten med. Syntaksen er

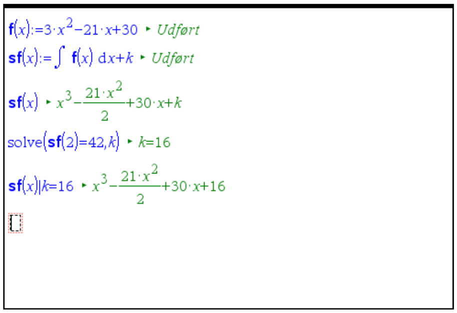
$$\int (f(x), x, k)$$

Du kan også skrive kommandoen direkte således: Integral(f(x),x,k)

Når du bruger skabelonen til at bestemme stamfunktioner, får du ikke en integrationskonstant med i resultatet — den må du selv tilføje. Du skal derfor definere stamfunktionen ved:

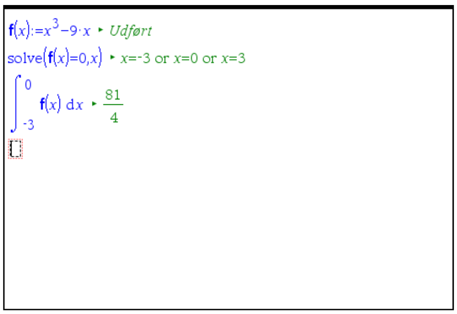
$$sf(x) = \int f(x)\,dx + k$$

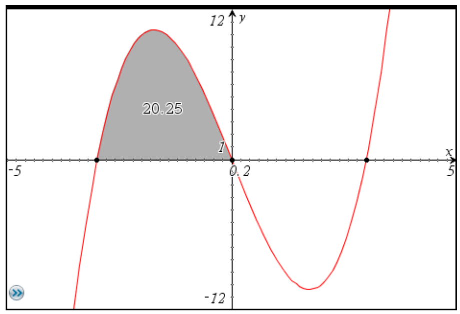
Opgaven er løst på nedenstående skærmbillede



Til det bestemte integral benytter du skabelonen . Du udfylder som ved det ubestemte integral — blot skal du her medtage grænser. Husk, at du navigerer mellem pladsholderne med TAB.

Grafen for $f(x) = x^3 - 9x$ afgrænser sammen med x-aksen i anden kvadrant en punktmængde. Bestem arealet af denne punktmængde.





Tip
Bestem først skæringspunkterne med x-aksen ved at bruge værktøjet til bestemmelse af skæringspunkter (udpeg x-aksen som den ene graf).

På det højre skærmbillede ser du opgaven løst med 6:Undersøg grafer ▸ 7:Integral. Med dette værktøj skal du først udpege funktionen og dernæst de to skæringspunkter med x-aksen en efter en — du kan også indtaste grænserne direkte.

12 Matematiske modeller

I Lister og Regneark du adgang til et væld af værktøjer, der gør arbejdet med modeller menustyret og meget fleksibelt. I dette afsnit vil du lære at

- plotte data i Diagrammer og statistik
- udføre lineær regression
- udføre eksponentiel regression
- udføre potens regression
- lave en grafisk modelkontrol

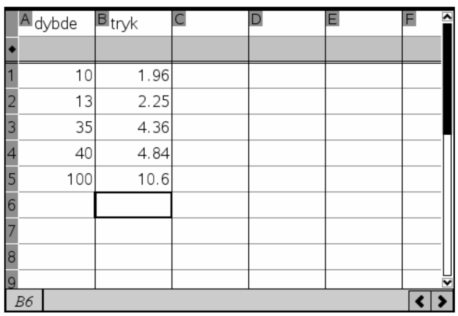
Lineær regression

Skemaet viser trykket i forskellige dybder under havoverfladen

Dybde (*m*)	10	13	35	40	100
Tryk(*atm*)	1.96	2.25	4.36	4.84	10.60

Gør rede for, at trykket med god tilnærmelse er en lineær funktion af dybden.
Find trykket i en dybde på 150 m, og bestem den dybde, hvor trykket er 30 atm.

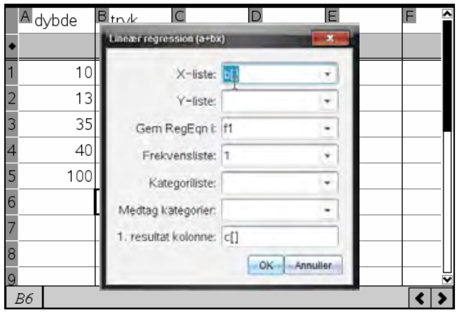
Dataene indtastes i et Lister og Regneark værksted. Kolonnerne navngives *dybde* og *tryk* hhv.:



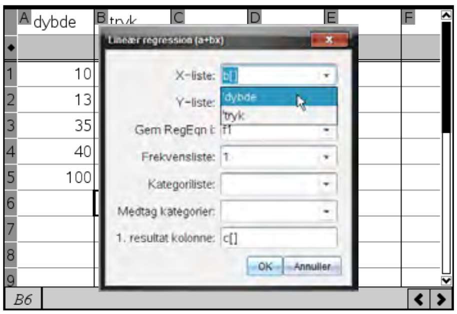
	A dybde	B tryk	C	D	E	F
◆						
1	10	1.96				
2	13	2.25				
3	35	4.36				
4	40	4.84				
5	100	10.6				
6						
7						
8						
9						

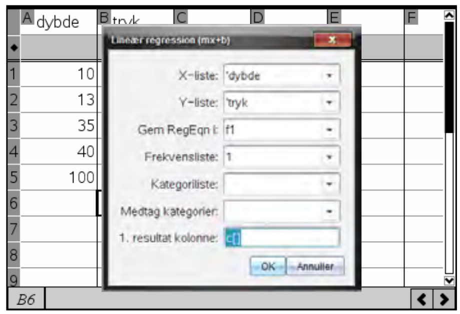
B6

For at få udført en lineær regression på disse punkter, vælger du 4:Statistik ▸ 1:Statistiske beregninger... ▸ 3:Lineær regression (mx+b). Dette åbner den viste dialog:



I dialogen skal du udpege *x*-listen og *y*-listen. Dette *kan* du gøre ved at referere til kolonnerne via navnene *a*[] og *b*[], men her er det mest bekvemt at vælge *dybde* og *tryk* i kombinationsboksene:

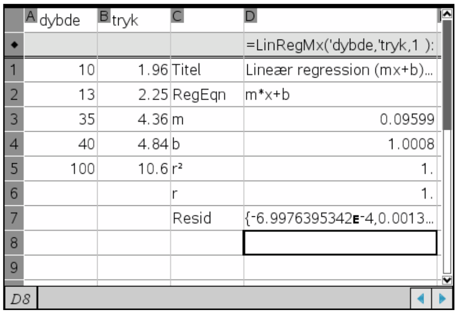




I det tredje felt skal du angive, hvor du vil gemme regressionsligningen (som funktion). Her foreslås *f*1, og er den ikke brugt til noget andet, så vælg den. Herved bliver regressionsligningen tilgængelig i andre værksteder.

Husk at indstille i feltet **1. resultat kolonne** (her *c*[]), dvs., hvor du vil have sat resultatet af regressionen ind i regnearket.

Klik OK, og resultatet vises i kolonne C og D:

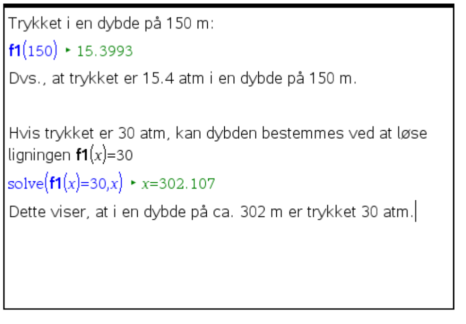


Her kan du se, at regressionslinjen får hældningen (m) 0.09599 og at trykket ved overfladen (b) er 1.0008.

Resultatet af regressionen viser tillige to størrelser: r og r^2, kaldet korrelationskoefficient og forklaringsgrad hhv. Almindeligvis regnes en model for acceptabel, hvis r^2 er over 0.95, og glimrende, hvis r^2 er over 0.99. Din lineære model er altså glimrende!

Residualerne, Resid, finder du nederst på det højre skærmbillede. Resid er en liste af tal, der viser forskellen mellem de observerede trykværdier og de (teoretiske) trykværdier beregnet vha. modellen.

For at finde trykket i en dybde på 150 m og bestemme den dybde, hvor trykket er 30 atm., kan du indsætte et Noter værksted:

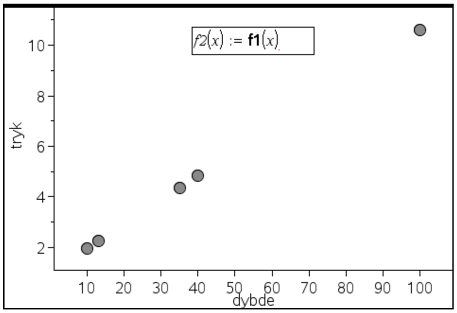


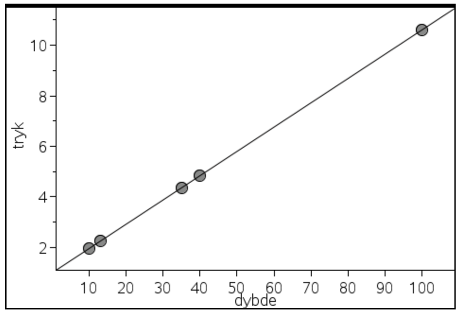
Grafisk kontrol

Du har allerede set, hvordan du med et par tastetryk meget bekvemt kan få tegnet regressionslinjen ind sammen med datapunkterne i et Diagrammer og statistik værksted. Hvis du har lavet regressionen i Lister og Regneark, behøver du ikke at genberegne regressionsligningen i Diagrammer og statistik værkstedet — nu kan du direkte plotte funktionen f1, men resultatet er det samme.

Indsæt et Diagrammer og statistik værksted, og indstil akserne til at vise *dybde* og *tryk* hhv. Vælg 4:Undersøg data ▸ 4:Plot funktion

Tip
Fra starten af vises regressionslinjen som en fed linje. Klik uden for linjen, og straks bliver stregtykkelsen bedre.

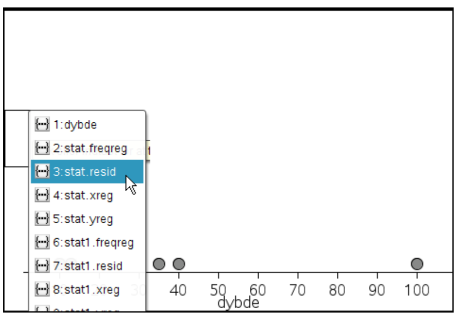


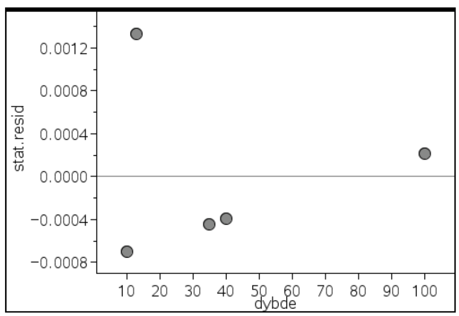


Residual plot

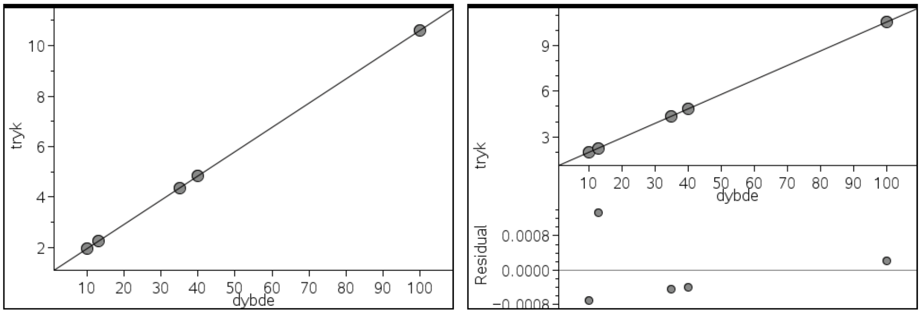
For at plotte residualerne skal du indsætte et Diagrammer og statistik værksted. Indstil som vist på det venstre skærmbillede, og straks får du tegnet residualplottet:

Obs
Residuallisten hedder som variabel **stat.resid**





Du kan lave kontrollen i én arbejdsgang i Diagrammer og statistik værkstedet ved først at indstille akserne til at vise *dybde* og *tryk*, og dernæst vælge 4:Undersøg data ▸ 7:Residualer ▸ 1:Vis residual plot:



Plottet viser, at datapunkterne ligger tilfældigt fordelt omkring den rette linje og at den typiske afvigelse på den enkelte måling er af størrelsesorden 0.001.

Eksponentiel regression

Tabellen viser sammenhørende værdier af temperaturen T (målt i °C) i en fryser og holdbarheden D (målt i dage) af en rullepølse, der opbevares i en fryser

Temperatur (T)	-25	-20	-15	-10
Holdbarhed (D)	280	154	91	49

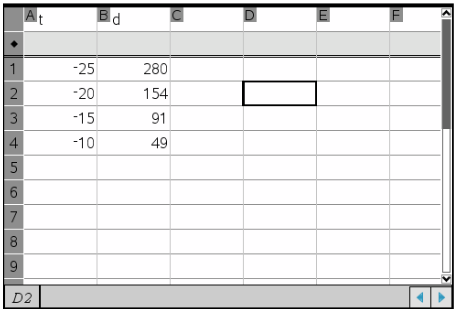
Det oplyses, at D med god tilnærmelse er en eksponentielt aftagende funktion af T.

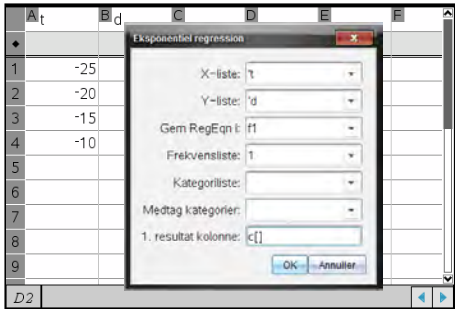
a) Bestem en forskrift for denne funktion

b) Bestem ved hjælp af den fundne forskrift holdbarheden ved en temperatur på -18 °C, og bestem temperaturen, hvis holdbarheden er 180 døgn.

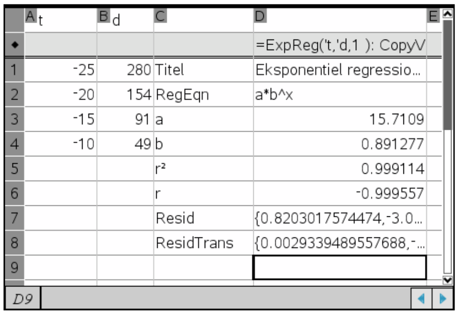
c) Bestem ved hjælp af den fundne forskrift halveringstiden for holdbarheden, og bestem den procentvise ændring i holdbarheden, når temperaturen øges 2 °C

Tast data ind i et Lister og Regnearksværksted, navngiv kolonnerne og lav regressionen med 4:Statistik ▸ 1:Statistiske beregninger... ▸ A:Eksponentiel regression:

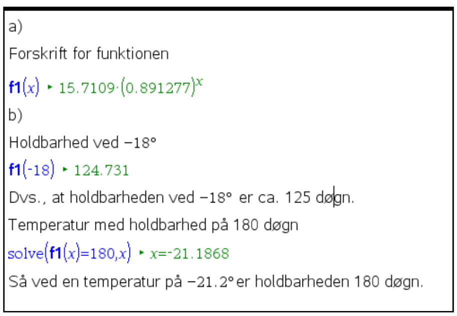


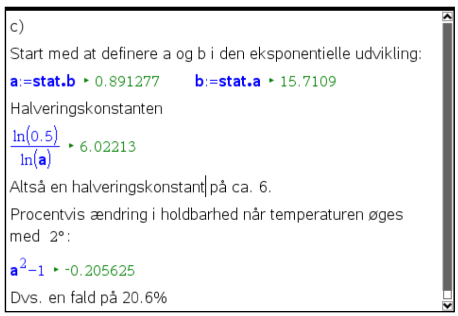


Obs
TI-Nspire CAS giver forskriften på formen ab^x og ikke, som du er vant til, på formen ba^x.



Resten af opgaven løses i Noter, hvor du husker på, at regressionsligningen er gemt som funktionen $f1$.

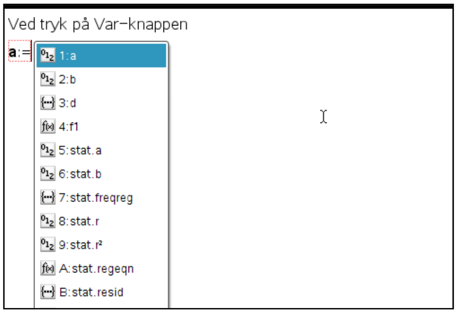


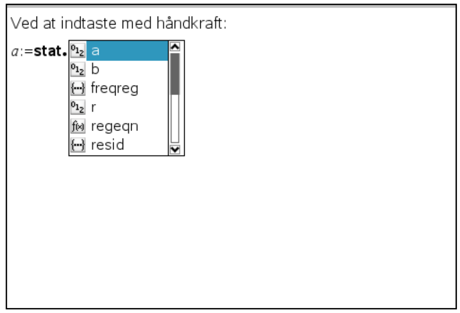


Brug - knappen når du skal indtaste *stat.b* og *stat.a*. Med - knappen får du en oversigt over og adgang til alle de variabler, der er i brug i den aktuelle opgave.

Obs
Punktum efter stat er meget vigtigt.

Taster du ind ved håndkraft, og skriver *stat.*, så popper en liste op over variabler knyttet til din regression (højre skærmbillede):





Potens regression

Tabellen viser for 3-slået tovværk sammenhængen mellem tovværkets diameter (målt i mm) og tovets brudstyrke (målt i kg).

Diameter	4	5	6	8	10	14	16	20	24	26
Brudstyrke	250	400	600	1000	1550	3200	4000	6000	8600	10000

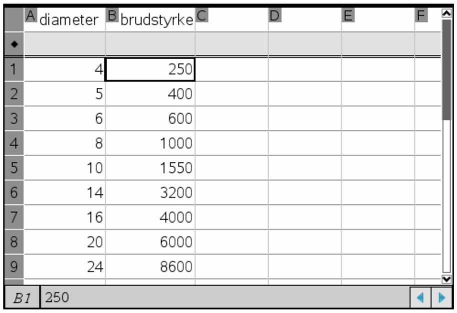
Det oplyses, at brudstyrken som funktion af diameteren tilnærmelse er en funktion af formen $f(x) = b \cdot a^x$.

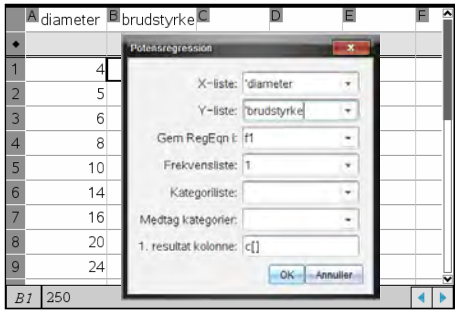
a) Benyt tabellen til at bestemme $f(x)$.

b) Benyt den fundne forskrift $f(x)$ til at bestemme, hvor mange gange så stor diameteren skal være, hvis brudstyrken skal fordobles

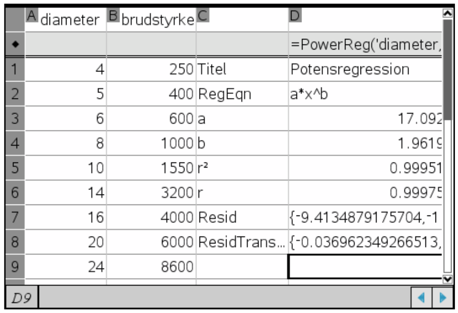
---

Tast data ind i et Lister og Regnearksværksted, navngiv kolonnerne og lav regressionen med 4:Statistik ▸ 1:Statistiske beregninger... ▸ A:Potensregression:





Obs
TI-Nspire CAS giver forskriften på formen ax^b og ikke som du er vant til, på formen bx^a.



Resten af opgaven løses i Noter, hvor du husker på, at regressionsligningen er gemt som funktionen $f1$:

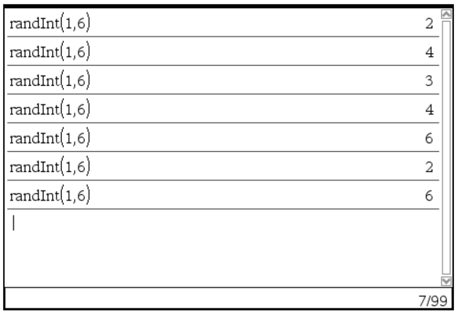
13 Sandsynlighedsregning

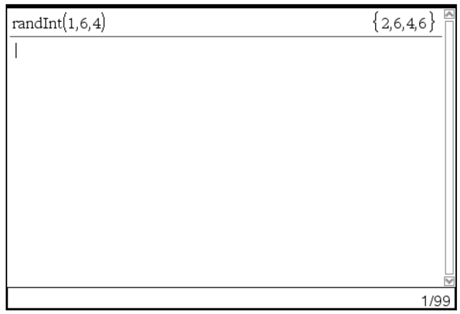
TI-Nspire CAS stiller en lang række sandsynlighedsteoretiske funktioner til rådighed. I dette afsnit skal du kun se en enkelt af disse, idet du skal på opdagelse i sandsynlighedsregningen med simulation som værktøj.

Terningkast

Ved kast med en terning er der 6 *mulige* udfald: 1, 2, 3, 4, 5 og 6, hvor tallet refererer til antallet af øjne på den side af terningen, der vender opad.
Du kan simulere kast med en terning ved at vælge et tilfældigt helt tal mellem 1 og 6. Hertil er TI-Nspire CAS udstyret med funktionen *randInt*. Fx vil *randInt*(1,6) give et tilfældigt tal mellem 1 og 6 — svarende til et kast med en terning. Eksperimenter med funktionen. Du vil næppe få samme resultater som på skærmbillederne nedenfor:

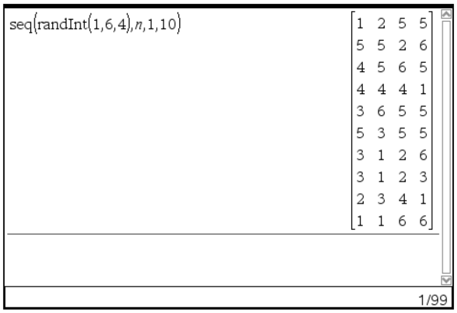
Obs
Tilfældig-tals generatoren skal have et tal at starte på (0 er standard). To håndholdte vil generere præcis de samme tilfældige tal, hvis de benytter samme start-tal. Du kan ændre med RandSeed.

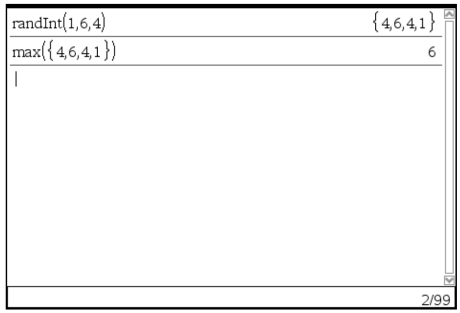




På skærmbilledet til højre er vist, hvordan du simulerer fire kast med én terning. Resultatet skal tolkes således, at du i første kast slår en 2'er, i andet kast en 4'er, i tredje kast en 3'er og i fjerde kast en 4'er.
Hvad er *sandsynligheden* for at få (mindst) én 6'er i 4 kast med en terning ? For at finde ud af dette skal simulationen *randInt*(1,6,4) gentages mange gange, og undervejs skal der holdes regnskab med, om der kommer en 6'er i et af de fire kast eller ej.
Til den slags gentagelser kan sekvensfunktion *seq* benyttes. Hvis du fx vil lave 10 gentagelser af *randInt*(1,6,4) gør du således:

Obs
seq virker i det væsentlige som en løkke i stil med **for** $n = 1$ **to** 10





Hver række i skærmbilledet ovenfor repræsenterer udfaldet af 4 kast med en terning. En optælling i listen (du får måske et andet resultat) viser, at i halvdelen af de 10 gentagelser er der (mindst) én 6'er.

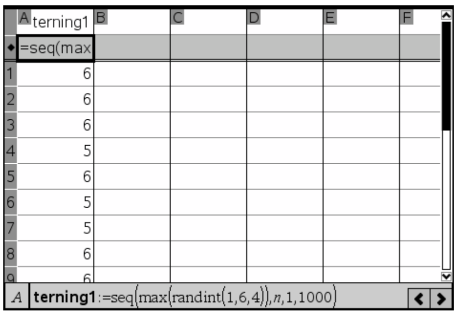
Da det eneste interessante er, om der er en 6'er i udfaldet eller ej, er det tilstrækkeligt at undersøge, om det største element i listen er 6. Hertil er *max*-funktionen nyttig — se skærmbilledet oven for til højre.

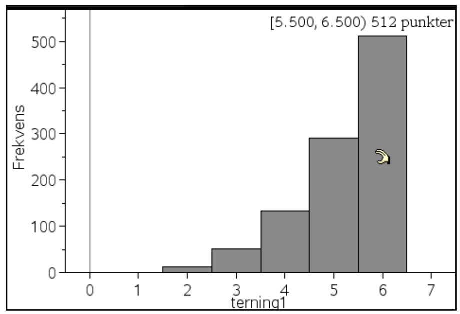
Indsæt et Lister og Regneark værksted, og indtast formlen

$$= seq(\max(randInt(1,6,4)), n, 1, 1000)$$

i formelfeltet i kolonne A. Dette vil give dig 1000 gentagelser af 4 kast med en terning, hvor kun det største øjental vises:

Tip
I Lister og Regneark kan du nemt foretage en genberegning ved at taste **Crtl R**. Prøv dette, og få gentegnet histogrammet. Du vil næppe få 512 punkter igen.





Indsæt et Diagrammer og statistik værksted, og vælg Histogram som plottype. 512 punkter tyder på, at sandsynligheden er omkring 0.51 for at slå en 6'er i 4 kast med en terning.

Chevalier de Meres problem

Omkring 1650 led Chevalier de Mere svære økonomiske tab som følge af, at han havde ræsonneret sig frem til, at følgende to spil har samme gevinstchance:

Spil 1: Kast en terning 4 gange og indgå et væddemål om at få en 6'er.
Spil 2: Kast to terninger 24 gange, og indgå et væddemål om at få en dobbelt-6'er

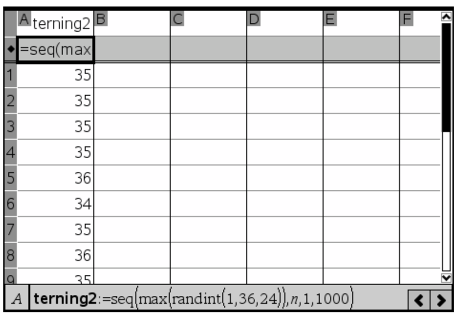
Med andre ord hævder de Mere, at sandsynligheden for, at det lykkes, er større end 0.5 i begge spil. Undersøgelsen i sidste afsnit viser, at sandsynligheden for at spil1 lykkes er omkring 0.51 — og altså større end 0.5.

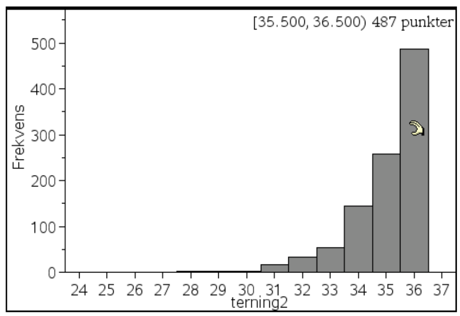
Men hvad med det andet spil?
Basalt set er her tale om et eksperiment med 36 mulige udfald — her systematisk opskrevet:

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),\cdots,(6,5),(6,6\}$$

hvor fx (1,4) skal forstås sådan, at terning1 viser 1 og terning2 viser 4. Hvis terningerne er ægte, så har alle 36 mulige udfald har samme sandsynlighed for at forekomme.

Hvis udfaldene nummereres 1..36, kan ét kast med to terninger simuleres ved *randInt*(1,36) og 24 kast med to terninger ved *randInt*(1,36,24).
For at danne dig et skøn over sandsynligheden for at slå en dobbelt-6'er i 24 kast med to terninger, behøver du blot at redigere beregningen, du benyttede ovenfor, en smule:





Her ser sandsynligheden ud til at være mindre end 0.5. Prøv at genberegne nogle gange, så du kan blive overbevist om, at sandsynligheden faktisk er mindre end 0.5.

Binomialfordelingen

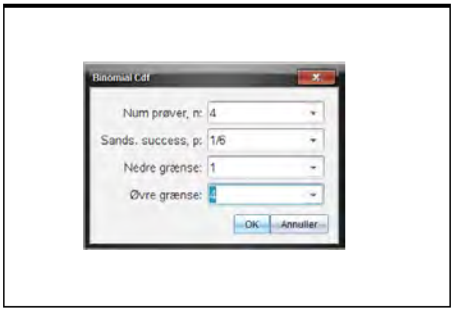
Hvis X betegner antallet af 6'ere i 4 kast med en terning, så er X binomialfordelt med parametrene $n = 4$ og $p = \frac{1}{6}$.

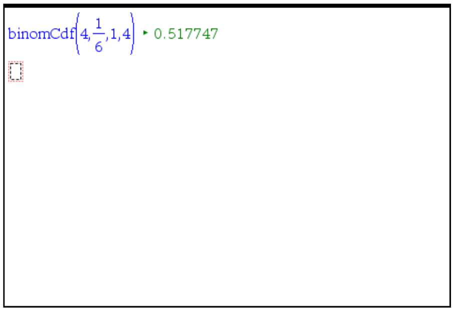
Bestem sandsynligheden for at få mindst én 6'er i 4 kast med en terning. Eller med andre ord, $P(X \geq 1)$.

Indsæt et Noter værksted, og vælg  6:Beregninger ▸ 5:Sandsynlighedsregning ▸ 5:Fordelinger ▸ E:Binom Cdf.

Dette giver en dialogboks til løsning af binomialfordelingsopgaver. Idet du skal bestemme sandsynligheden for at få *mindst* én 6'er, skal nedre grænse sættes til 1 og øvre grænse til 4.

Klik OK, og resultatet står direkte til aflæsning:

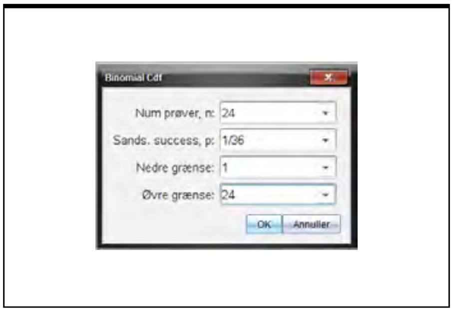


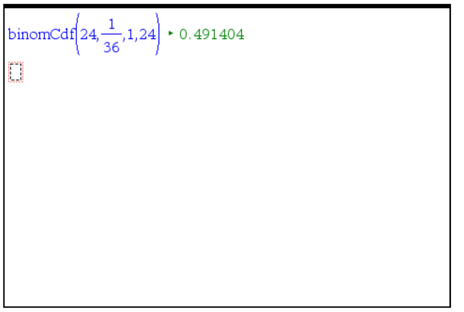


Lad Y betegne antallet af dobbelt 6'ere i 24 slag med to terninger. Så er Y binomialfordelt med parametrene $n = 24$ og $p = \frac{1}{36}$.

Bestem sandsynligheden for at få mindst én dobbelt 6'er i 24 kast med to terninger. Eller med andre ord, $P(Y \geq 1)$.

Gør som før:





At denne sandsynlighed er mindre end 0.5 lærte Chevalier de Mere på den hårde måde. Flere kilder hævder, at han blev så godt som ruineret på dette spil. Han forelagde problemet for en af datidens klogeste hoveder, Blaise Pascal (1623 - 1662), som naturligvis løste det og lagde grundstenen til moderne sandsynlighedsregning.

14 Statistik

Tip
Du finder en eksperimentel tilgang til statistik i Statistik med TI-Nspire CAS af Bjørn Felsager.

Deskriptiv statistik

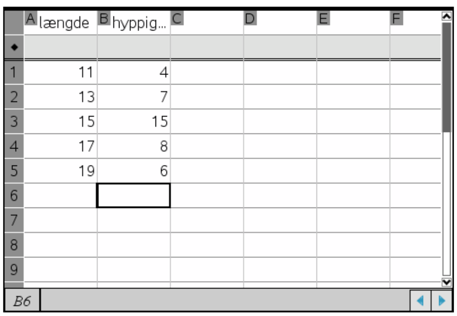
En virksomhed producerer små metalaksler, hvis længde varierer mellem 10 og 20 mm. Der udtages 40 aksler af produktionen, og deres længde måles. De 40 målinger er grupperet i intervaller

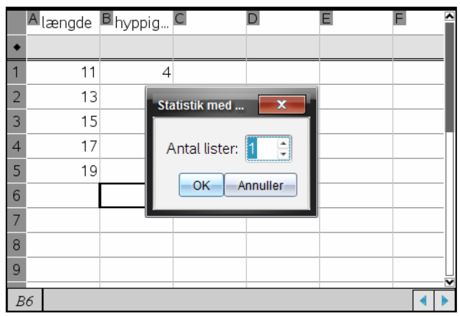
	$]10{,}12]$	$]12{,}14]$	$]14{,}16]$	$]16{,}18]$	$]18{,}20]$
Hyppighed	4	7	15	8	6

Find middelværdi og spredning, og undersøg, om observationerne kan antages at være normalfordelte.

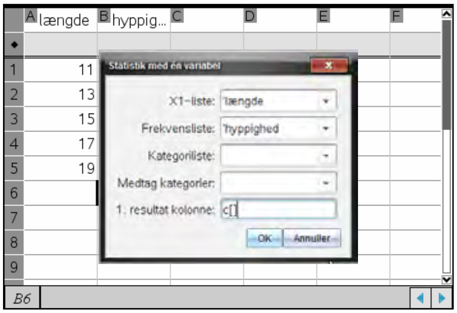
Åbn et nyt dokument, og indsæt et Lister og Regneark værksted. Du kan ikke indtaste intervaller i en kolonne, så indtast i stedet *intervalmidtpunkterne* i kolonne A og hyppighederne i kolonne B. Navngiv kolonnerne som vist.

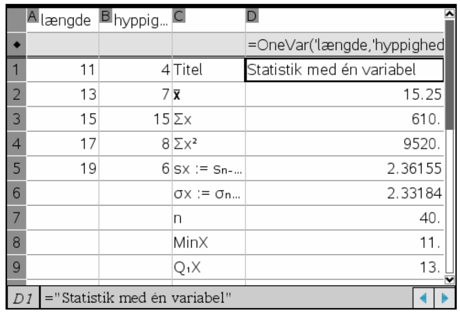
Vælg nu 4:Statistik ▸ 1:Statistiske beregninger... ▸ 1:Statistik ned én variabel





Først kommer et lille vindue frem, hvor du skal angive, hvor mange lister, der skal indgå i statistikken. Vælg her 1 — i modsat fald slås de to lister sammen.
Indstil som vist nedenfor, og statistikken er klar:

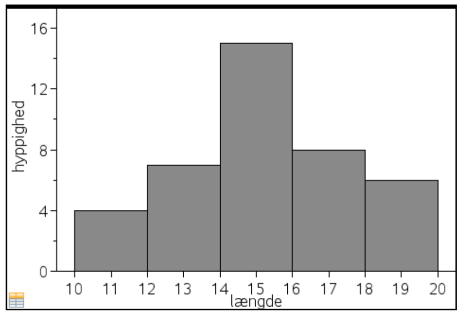




I listen kan du se middelværdien (15.25), og bladrer du ned i listen, kan du blandt meget andet finde spredningen samt kvartilsættet (der i øvrigt ikke kan bruges til noget her, da data er samlet i interval midtpunkterne).

For at afbilde data i et histogram vælger du 1,3,5 3:Data ▸ Kombinationsdiagram. Indstil som vist på skærmbilledet til venstre:

Obs
Læg mærke til ikonen i nederste venstre hjørne. Det viser, at plottet er oprettet ud fra gruppedata.



Husk
Du kalder et objekts kontekst menu frem ved at højreklikke på det.

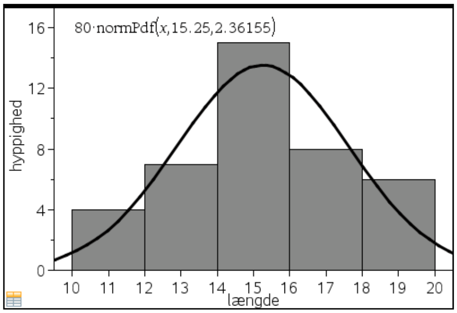
For at få den rette bredde på søjlerne, skal du kalde kontekstmenuen for søjlerne frem. Vælg her Søjleindstillinger, og sæt bredden til 2 og søjlestart til 10. Så får du et histogram som på skærmbilledet ovenfor.

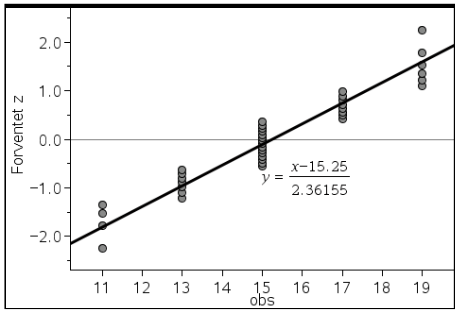
Du skal nu plotte sandsynlighedsfordelingen for normalfordelingen sammen med histogrammet.

Obs
NormPdf er fordelings-funktionen for normalfordelingen

Vælg 4:Undersøg data ▸ Vis normal PDF.

Af skærmbilledet kan du se, at det er funktionen *normPdf* med middelværdi 15.25 og spredning 2.36115, der er tegnet.





På det højre skærmbillede ovenfor er vist et normalfordelingsplot. Plottet ser lidt sært ud, men det skyldes, at observationerne i hvert interval er samlet i intervalmidtpunktet. Havde du haft de rå data (inden gruppering) til rådighed, ville du se punkterne ligge pænt omkring den rette linje.

Plottet er ikke helt simpelt at lave, da du ikke umiddelbart kan ændre visningsformatet for histogrammet til et normalfordelingsplot, men her er en opskrift:

Gå Lister og Regneark værkstedet. Inden du kan afbilde data, skal du ekspandere disse, så observationen 11 optræder 4 gange, observationen 13 optræder 7 gange, osv. Det gør du ved at indtaste formlen

Tip
Du kan indsætte en tom kolonne ved at placere markøren, hvor den tomme kolonne skal indsættes, og taste ▸ Indsæt kolonne

=freqTable ▸ list(længde,hyppighed)

i formelfeltet i kolonne C (eller en anden tom kolonne). Navngiv denne kolonne *obs*.

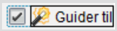
Kommandoen *freqTable ▸ list* indsætter du fra Kataloget og variablerne *længde* og *hyppighed* indsætter du nemmest med var.

Normalfordelingsplottet laver du ved at indsætte et nyt Diagrammer og statistik værksted, knytte variablen *obs* til x-aksen og vælge 1:Diagramtyper ▸ 4:Normalfordelingsplot.

Antag, at længden af metalakslerne er normalfordelt med middelværdi $\mu = 15.25$ og spredning $\sigma = 2.36$.
Hvor mange procent af metalakslerne har en længde mellem 13mm og 17mm?

Obs
NormCdf er den kummulerede fordelingfunktion for normalfordelingen.

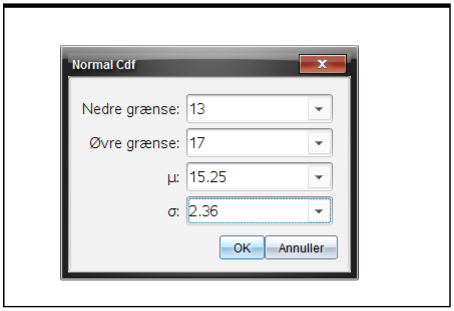
Obs
Sørg for, at feltet

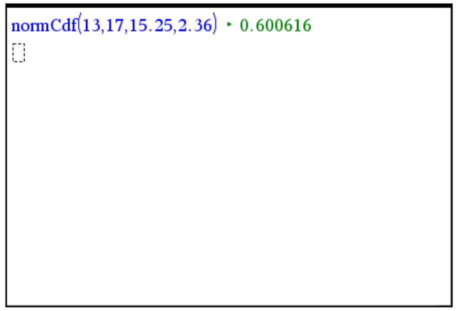


er markeret

Tip
Du kan indsætte μ og σ fra listerne som hhv. stat.x og stat.sx

Indsæt et Noter værksted, og hent *normCdf* i kataloget. Udfyld som vist, og du finder, at ca. 60% af metalakslerne har en længde mellem 13mm og 17mm:



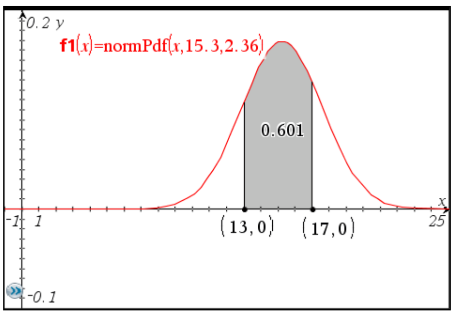


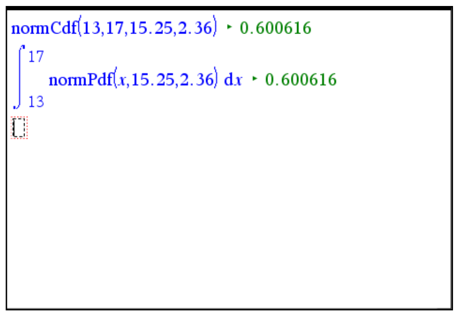
Du kan komme frem til dette resultat på mange måder. Husk, at det, der skal bestemmes, er arealet under normalfordelingen (*normPDF* med $\mu = 15.25$ og $\sigma = 2.36$) i intervallet [13,17].

Neden for ser du dette illustreret dels grafisk, og dels ved en beregning i Noter værkstedet:

Tip
Du kan også lave denne arealbestemmelse i Diagrammer og Statistik med

4:Undersøg data ▸ Skraver under funktion, men her kan du ikke indtaste grænserne 13 og 17. De to grænser skal først afsættes ved at plotte dem som værdier med 8:Plot værdi.





χ^2-test for uafhængighed (med integraler)

Dette afsnit er i det væsentlige identisk med afsnittet af samme navn i kapitel 5. Dog benyttes her integraler til at beregne den kritiske værdi og til fastlæggelse af p-værdien.

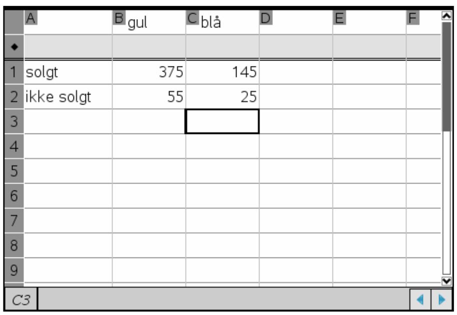
En forretningskæde vil undersøge, om farven på indpakningen af nye kartofler påvirker salget.
Butikken sælger derfor i en periode poser med samme slags kartofler, alle med 2,5 kg/pose og til samme pris.
Der bliver i alt sendt 600 poser kartofler ud i butikkerne, hvoraf 520 bliver solgt. Af de solgte poser er 375 gule, og der er 55 gule poser tilbage. De øvrige poser er blå.

Undersøg, om der er grundlag for at påstå, at farven påvirker salget af kartofler.

Først skal du lige vha. lidt hovedregning regne ud, at der er solgt 145 blå poser, og der er 25 blå poser tilbage.

Indtast oplysningerne i et Lister og Regneark værksted:

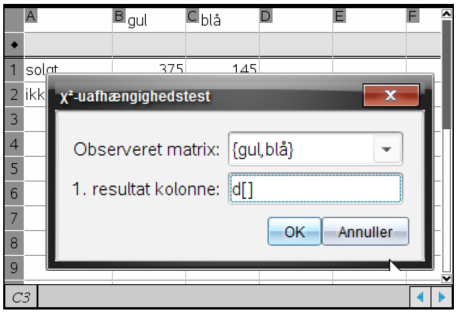
Obs
Kolonnenavnene *gul* og *blå* er variabler. Rækkenavnene ‘Solgt’ og ‘ikke solgt’ er tekst.

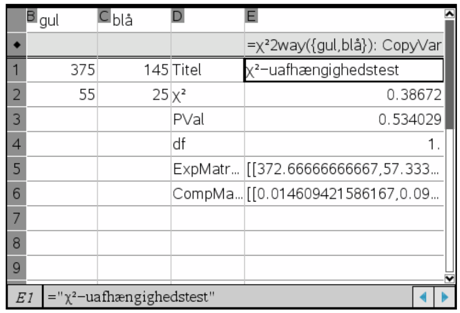


Du skal afgøre, om de oplyste data er i rimelig overensstemmelse med nulhypotesen om uafhængighed mellem farve og antal solgte poser. Hertil skal du benytte det indbyggede test for uafhængighed af to variable.

Testen kan klares direkte i Lister og Regneark:

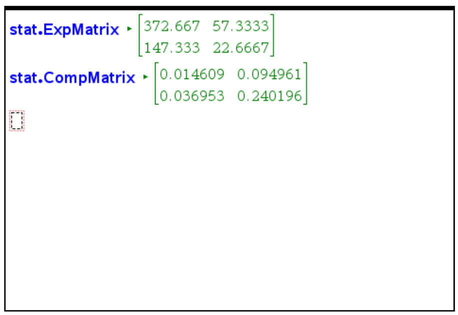
Vælg 4:Statistik ▸ 4:Statistiske tests... ▸ 8:χ^2 uafhængighedstest.... Guiden forventer, at du indtaster navnet på en matrix med observationerne. Dette kan du klare ved at indtaste {gul,blå}:





Af skærmbilledet til højre fremgår:

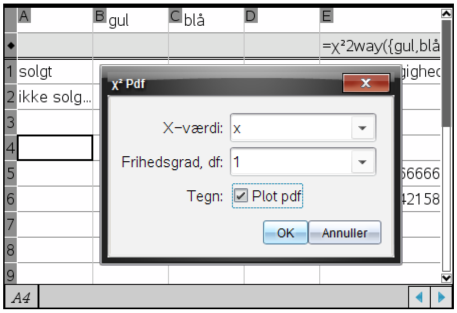
1. χ^2 - teststørrelsen har værdien 0.38672
2. *p*-værdien er 53.4%, dvs. sandsynligheden for at finde en teststørrelse, der er mindst lige så skæv som den observerede, er 53.4%. Nulhypotesen accepteres altså på signifikansniveauet 5%.
3. Teststørrelsen er χ^2 - fordelt med 1 frihedsgrad.
4. De forventede værdier finder du i matricen ExpMatrix og enkeltbidragene til χ^2 - teststørrelsen finder du i CompMatrix. Vil du se de to matricer kan det sker i et Noter værksted, hvor de hentes via var - knappen:

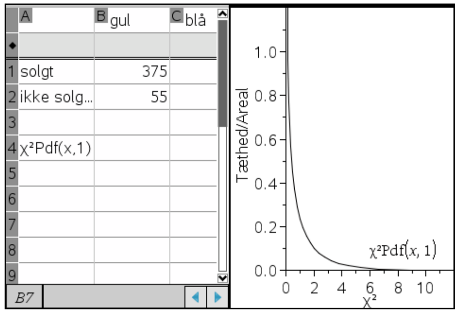


Du får ikke oplyst den kritiske værdi for en test på signifikansniveau 5%. Skal du bruge denne, må du selv beregne den. Hertil skal du benytte 'tæthedsfunktionen' for en χ^2 - fordeling med 1 frihedsgrad.

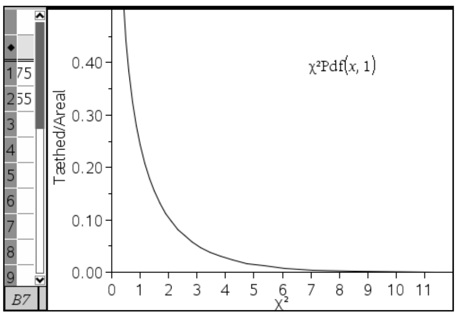
Du kan naturligvis tegne grafen for denne i et Graf værksted, men en bedre graf til støtte for forståelsen af den kritiske værdi finder du i Diagrammer og statistik.

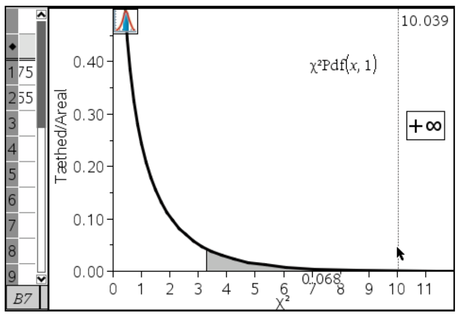
I Lister og regneark vælger du 4:Statistik ▸ 2:Stat-fordelinger. ▸ 7:χ^2 Pdf. Et lille vindue popper op, hvor du kan indtaste en x-værdi og en frihedsgrad, hvor du vil have beregnet værdien af χ^2Pdf(x,df).
Her sætter du x-værdien til x, frihedsgraden til 1 og, vigtigst af alt, sæt et flueben i 'Plot pdf'.





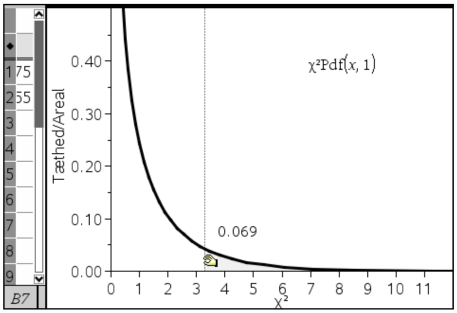
Træk om nødvendigt i skillelinjen mellem regnearket og grafen, og indstil grafen, så Ymax er 0.5. Benyt hertil værktøjer 5:Vindue/Zoom ▸ Indstillinger for vindue

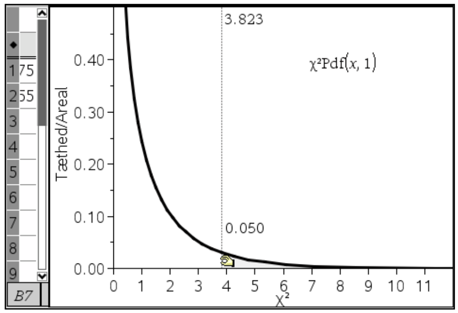




Vælg nu værktøjet 4:Undersøg Data ▸ 5:Skraver under funktion. Placer venstre endepunkt tilfældigt — dog ikke så langt til venstre, at tegnet $-\infty$ vises og ikke så langt til højere, at ∞ vises — højre endepunkt placeres når symbolet ∞ vises. Se højre skærmbillede ovenfor.

Klik i det skraverede område, og det aktuelle areal vises. Flyt om nødvendigt tallet. Grib fat i venstre side af det skraverede område og træk indtil du får arealet 0.05 — svarende til 5%.





Den kritiske værdi kan aflæses til ca. 3.8 i skærmbilledet til højre, hvor 'halearealet' er 0.05.

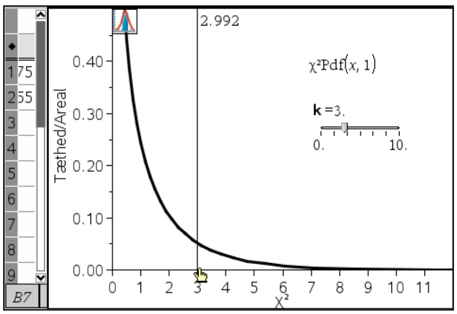
Desværre forsvinder 3.823 så snart du slipper musen. Du kan få en mere bestandig værdi, hvis du styrer processen med en skyder. Opskriften er denne (slet først det skraverede område ved at klikke i området og trykke på Del):

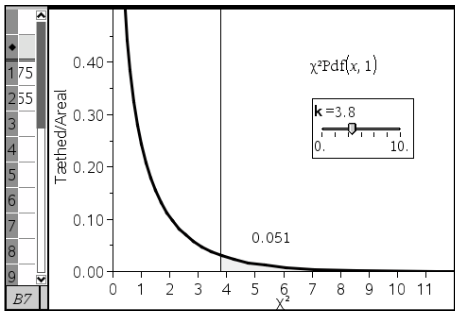
1. Opret en skyder (3:Handlinger), og indstil steplængden til 0.1. Kald variablen tilknyttet skyderen for k

2. Vælg 4:Undersøg data ▸ 8:Plot værdi, og indtast k for den værdi der skal plottes. Check, at den plottede værdi kan flyttes med skyderen.

3. Skraver nu under grafen, hvor vælger den plottede værdi som det venstre endepunkt og ∞ som det højre endepunkt.

4. Bestem den kritiske værdi ved at ændre skyderen, så arealet bliver 0.05.

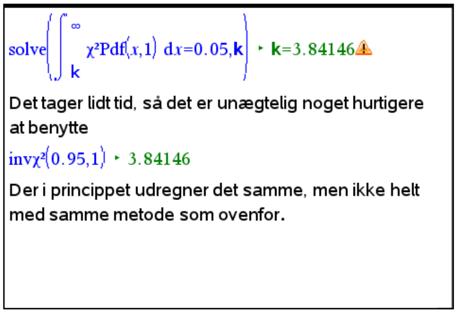




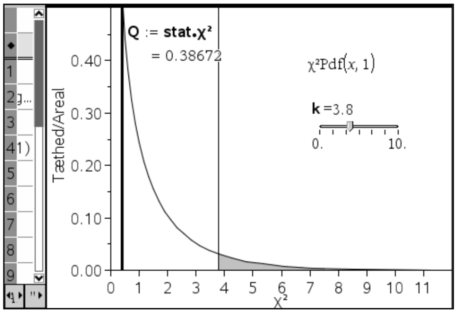
Hvis du vil have bedre præcision, kan du lave en mindre steplængde.

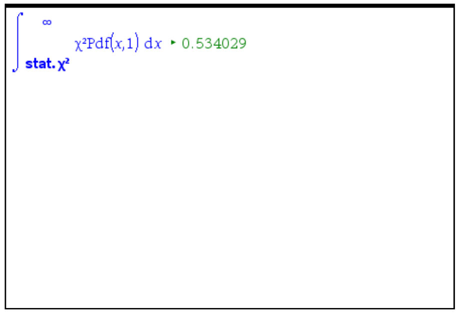
Du kan fx også beregne kritiske værdi direkte fx i et Noter værksted:

Obs
Hvis du har Guider slået til, så indtaster du blot x for x-værdien og 1 for frihedsgrader. Du vil få en syntaksfejl, men det betyder ikke noget her.



På skærmbilledet nedenfor ser du χ^2 - teststørrelsen indtegnet, og den ligger jo godt og forsvarligt inde i acceptområdet.



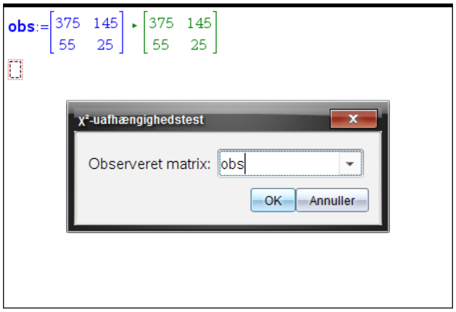


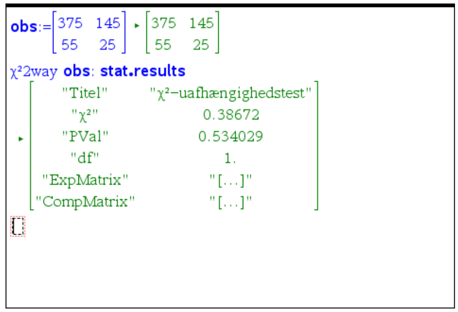
p-værdien er sandsynligheden for, at χ^2 - teststørrelsen får en værdi, der er større end eller lig med 0.38672 (svarende til den blå linje) — eller med andre ord: Arealet under kurven fra den Q-linje til uendelig er lig med 0.534029. Dette er eftervist i skærmbilledet til højre.

I ovenstående eksempel er χ^2-testen foretaget i Lister og Regneark. Du kan også foretage testen i Noter eller for den sags skyld i Beregninger. I begge værksteder skal du selv definere matricen med de observerede værdier, men det klarer du nemt med skabelonen 2x2-marix 

Til beregningen skal du benytte funktionen χ^2*2way*, som du finder i kataloget (husk, at Guider skal være slået til):

Tip
Hvis du har indtastet *gul* og *blå* i Lister og Regneark, han du definere *obs* ved *obs:={gul,blå}*





Normalfordeling: Konfidensinterval og hypotesetest

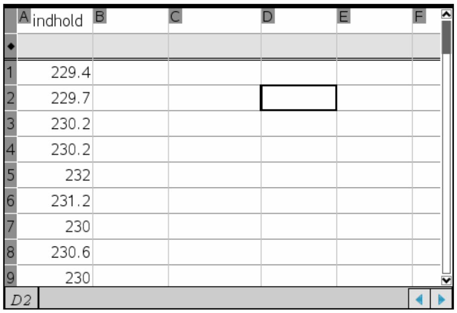
En kaffeautomat skal fylde 23 cl kaffe i et krus ved brygningen. Virksomheden, der producerer automaten, vil teste denne inden den sælges. Den mænge kaffe, automaten hælder i et krus, vides at være normalfordelt med middelværdi μ og spredning $\sigma = 1.5$ml. For at teste automaten har man ladet den brygge 20 krus kaffe, og målt indholdet:

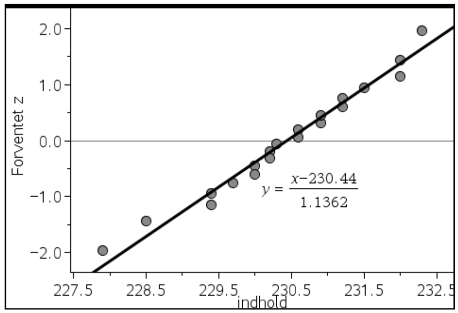
229.4	229.7	230.2	230.2	232.0	231.2	230.0	230.6	230.0	229.4
230.9	228.5	231.5	230.9	231.2	227.9	230.6	232.0	230.3	232.3

Find 90% konfidensintervallet for populationsmiddelværdien μ af den mænge kaffe, der serveres af automaten

Antyder ovenstående målinger, at populationsmiddelværdien μ er forskellig fra 230 ml?

Start med at indtaste måleresultaterne i en søjle i et Lister og Regneark værksted, og navngiv søjlen *indhold*. Indsæt et Diagrammer og statistik værksted, indsæt *indhold* i pladskolderen langs x-aksen og vælg normalfordelingsplot som plottype:



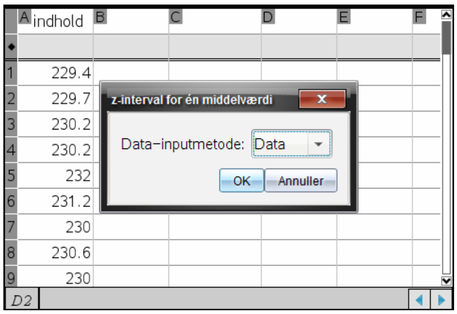


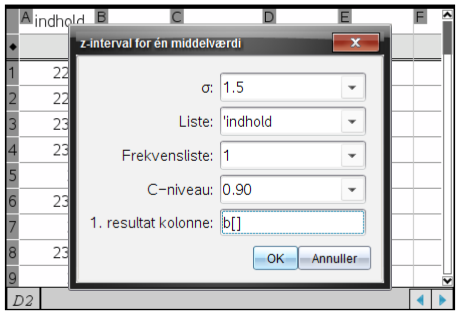
Obs
z-interval skal benyttes her, da der er tale om en normalfordeling med <u>kendt</u> varians.

Normalfordelingsplottet viser, at stikprøven på de 20 krus kaffe afspejler antagelsen om, at kaffeindholdet er normalfordelt.

I Lister og Regneark, vælg $\bar{X}$ 4:Statistik ▸ 3:Konfidensintervaller... ▸ 1:z-interval for én middelværdi, og vælg Data i næste skærmbillede. Fyld ud som vist, og afslut med OK:

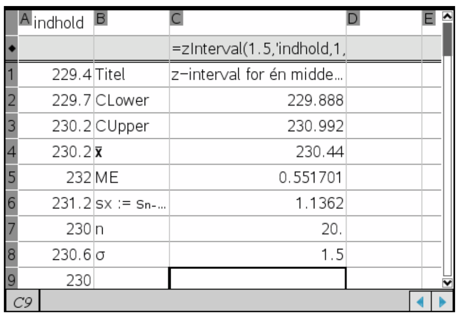
Tip
I stedet for Data kan du vælge Statistik. Dette valg kræver, at du kender stikprøve middelværdien (x-bar)





Obs
Standardafvigelsen i stikprøven udregnes med formlen

$$s_n = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$



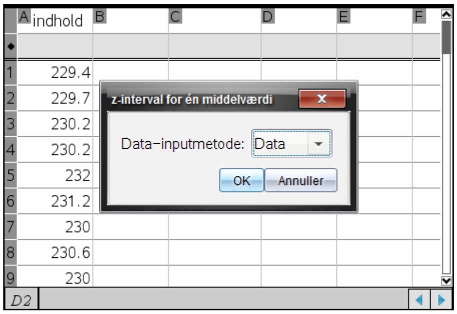
Her ser du, at konfidensintervallet er [229.888 , 230.992]. Desuden fremgår, at stikprøve-middelværdien er $\bar{x} = 230.44$ og at standardafvigelsen i stikprøven er $s_x = 1.1362$.

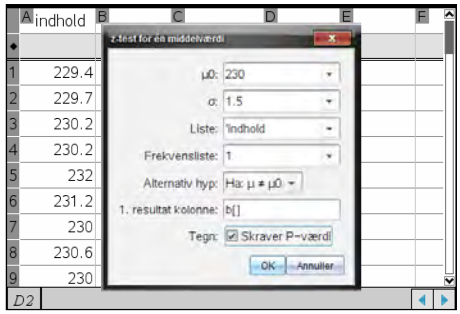
For at besvare det andet spørgsmål, skal du teste hypotesen H_0: μ = 230 mod alternativet H_a: μ ≠ 230 på niveau 10%.

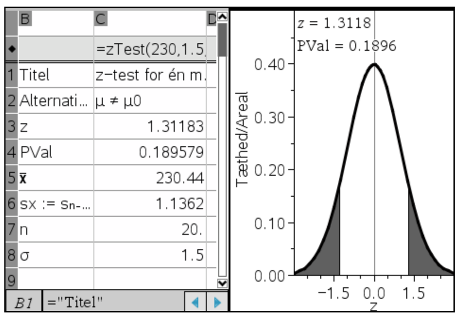
Da populationsmiddelværdien μ ligger i 90% konfidensintervallet [229.888 , 230.992], du fandt ovenfor, kan du ikke kan forkaste hypotesen H_0. Du kan dermed konkludere, at der ikke er noget der indikerer, at populationsmiddelværdien μ er forskellig fra 230 ml.

Normalfordelingstest (σ kendt)

En anden mulighed for at udføre ovenstående test i normalfordelingen finder du i 4:Statistik ▸ 4:Statistiske tests... ▸ z-test for én middelværdi. Fyld ud som vist, og afslut med OK:







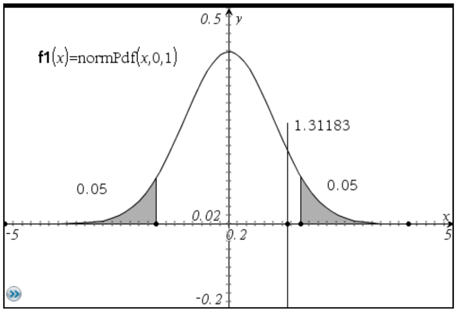
Obs
Teststørrelsen z udregnes således:

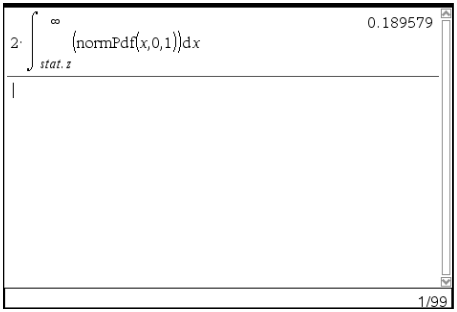
$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

hvor $\overline{x}$ er stikprøve middelværdien og n er stikprøve størrelsen.
z er normalfordelt med middelværdi 0 og spredning 1.

De fleste værdier på det sidste skærmbillede kender du allerede. De to nye, *z* og *PVal*, bruges til at afgøre, om en hypotese skal forkastes eller ej.

Teststørrelsen z er normalfordelt med middelværdi 0 og spredning 1. Da du skal teste på niveau 10%, vil kritiske værder for z befinde sig i de to 5% - haler i normalfordelingen — det er *ikke* de to haler der er skraveret på skærmbilledet ovenfor.





I det venstre skærmbillede ser du de to 5%-haler skraveret og det fremgår, at teststørrelsen z ligger i acceptområdet.

På det højre skærmbillede er vist, hvad værdien PVal betyder: Hvis hypotesen forkastes, så er sandsynligheden for, at vi forkaster en sand hypotese ca. 18.96% (fejl af 1. art)

Normalfordelingstest (σ ukendt)

En skole har undersøgt 25 elevers brug af skolens internet i en uge. Antallet af timer brugt på internettet i en uge blev registreret til:

5.0	4.4	5.7	5.6	5.5	5.2	5.0	4.8	3.6	4.1	4.6	4.9	4.0
6.7	5.5	5.4	6.7	5.8	5.4	4.8	5.9	5.1	3.8	4.1	6.7	

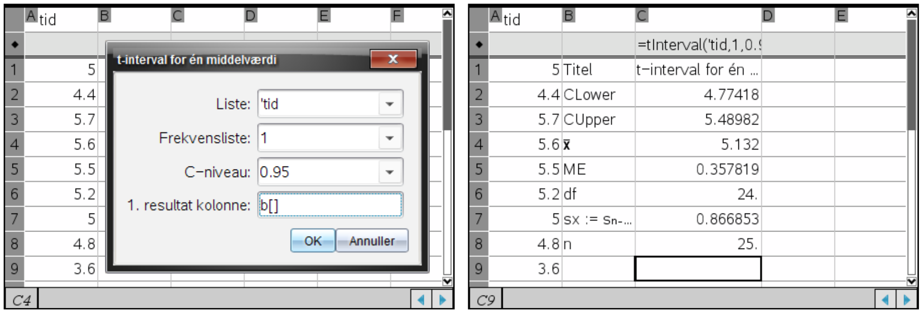
Antag, at den tid, skolens elever (populationen) bruger på internettet i en uge er normalfordelt.

Find 95% konfidensintervallet for stikprøve middelværdien.

Er der indikation for — på niveau 5% — at skolens elever bruger mere end 5 timer på Internettet ?

Obs
Da populationen er normalfordelt med ukendt spredning, skal en *t*-test benyttes

Indtast data i et Lister og Regneark værksted — kald kolonnen *tid* — og beregn *t*-konfidensintervallet (præcis som du gjorde ved *z*-testen) :



Obs
Du kan ikke benytte konfidens-intervallet til denne test. Det skyldes, at testen her er en-sidet.

Her kan du se, at t-konfidensintervallet er [4.77418,5.48982].

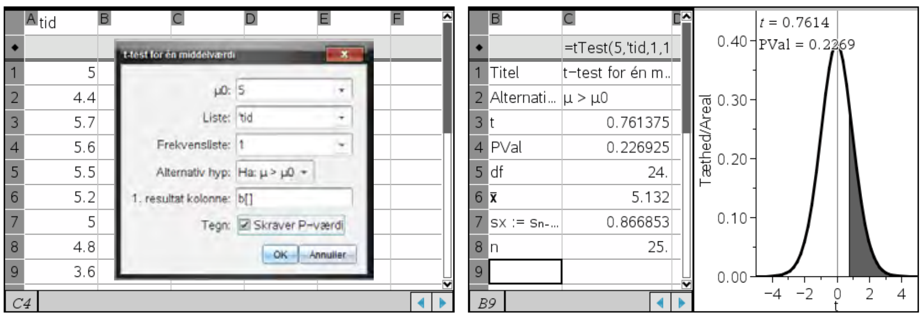
For at besvare det andet spørgsmål, skal du teste hypotesen H_0: $\mu = 5$ mod alternativet H_a: $\mu > 5$ på niveau 5%.

Lav en *t*-test: X 4:Statistik ▸ 4:Statistiske tests... ▸ t-test for én middelværdi. Gå frem som ved z-testen, og indstil således:

Obs
Teststørrelsen *t* udregnes således:

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{sx}{\sqrt{n}}}$$

hvor μ_0 er stikprøve middelværdien, *sx* standardafvigelsen og *n* er stikprøve størrelsen.
t er t-fordelt med 24 frihedsgrader



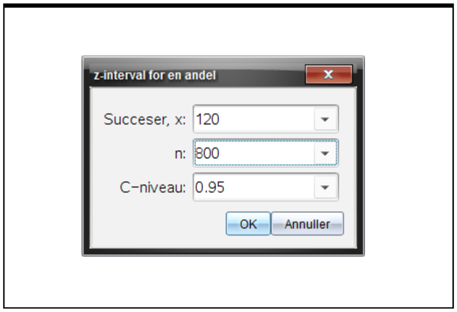
Du kan således ikke forkaste hypotesen $\mu = 5$ på det foreliggende grundlag.

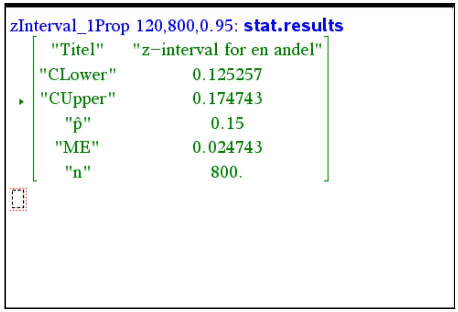
Opinionsundersøgelser

Ved sidste folketingsvalg fik Dansk Folkeparti 12.3% af stemmerne. I en opinionsundersøgelse spørger man 800 tilfældigt udvalgte danskere med stemmeret, hvor de vil sætte deres kryds, hvis der var valg i morgen. 120 af de adspurgte vil stemme på DF.

Giver dette resultat en indikation for, at DF har ændret vælgertilslutning ?

Med TI-Nspire CAS går den slags hypotesetest som en leg. Du kan fx starte med at finde konfidensintervallet:
I et Noter vælger du 6:Beregninger ▸ 6:Statistik ▸ 6:Konfidensintervaller... ▸ 5:z-interval for én middelværdi, og udfylder som vist:





Disse resultater viser, at stikprøveprocentdelen er 15% og at konfidensintervallet er [0.125257,0.174743]. Dvs., at med 95% sikkerhed, vil den sande procentdel for populationen vil ligge mellem 12.5% og 17.5% .

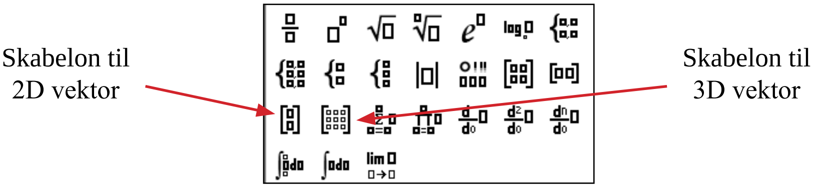
Hypotesen

H_0: DF har uændret vælgertilslutning

må altså forkastes på det foreliggende grundlag

15 Vektorregning

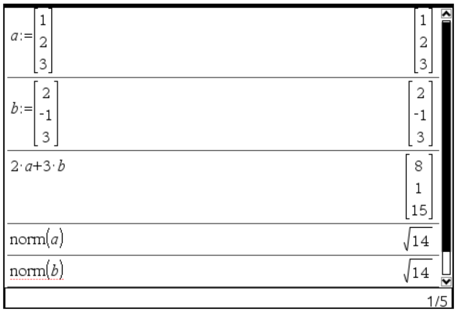
Du kan indtaste vektorer vha. skabeloner. Der er en til 2D vektorer, men til 3D vektorer må du bruge en mere generel matrixskabelon, der indstilles med 3 rækker og 1 kolonne.

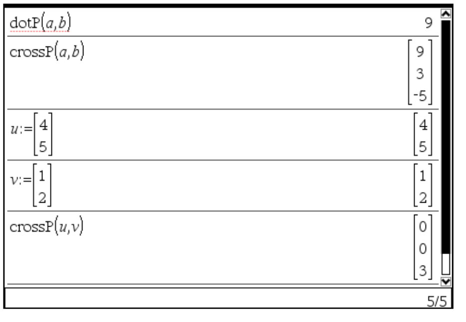


Langt nemmere er det at bruge genvejen, hvor du benytter kantede parenteser til at omslutte koordinaterne og semikolon til at adskille koordinaterne. Vær opmærksom på, at TI-Nspire CAS straks omformaterer din indtastning til en vektor.

I nedenstående skærmbillede ser du, hvordan du definerer vektorer og laver en simpel udregning med dem. Den første vektor, a, indtastes altså som [1;2;3]

Tip
Krydsproduktet er defineret i både 2 og 3 dimensioner. I 2 dimensioner er krydsproduktet en 3-dimensional vektor, der peger op ad z-aksen.





Som det ses, er det helt problemfrit at lægge vektorer sammen og gange dem med skalarer. Længden af en vektor beregnes med den indbyggede funktion norm.
Desuden er TI-Nspire CAS er udstyret med to funktioner til udregning af prikprodukt og krydsprodukt. Funktionerne hedder DotP og CrossP, hhv. Se det højre skærmbillede.

Dette er de grundlæggende vektorberegninger. Ved hjælp af dem og dine formler, kan du løse vektoropgaver.

Eksempler på vektoropgave

I et koordinatsystem i rummet er der givet 3 vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Bestem et gradtal for vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

b) Bestem koordinatsættet til projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{c}$.

c) Bestem tallene *s* og *t*, således at vektoren

$$\vec{d} = \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$$

står vinkelret på både $\vec{b}$ og $\vec{c}$, og angiv koordinaterne for $\vec{d}$.

Obs
Husk at indstille til at regne i grader. Dobbeltklik på **Indstillinger** i statuslinjen og indstil her. Du kan også indstille et enkelt matematikfelt til at regne i grader. Det sker under attributter.

Tip
Flere steder er output ikke vist: Højre-klik på et matematikfelt og vælg 'Attributter for matematikfelt'. Her kan du skjule output og meget mere. Eksperimenter med mulighederne.

Sådan kan du løse opgaven i et Noter værksted:

Først defineres de 3 vektorer:

$\mathbf{a}:=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}:\mathbf{b}:=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}:\mathbf{c}:=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

a)

Vinklen mellem de to vektorer bestemmes

$\text{solve}\left(\cos(v)=\frac{\text{dotP}(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\text{norm}(\mathbf{a})\cdot\text{norm}(\mathbf{b})},v\right)|0<v<180 \blacktriangleright v=57.6885$

Vinklen mellem de to vektorer a og b er således 57.7°

b)

Projektionen af a på c bestemmes

$\mathbf{p}:=\frac{\text{dotP}(\mathbf{a},\mathbf{c})}{(\text{norm}(\mathbf{c}))^2}\cdot\mathbf{c} \blacktriangleright \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Projektionen af a på c er således

$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

c)

Bestem tallene s og t, så

$\mathbf{d}:=\mathbf{a}+s\cdot\mathbf{b}+t\cdot\mathbf{c} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 2\cdot s-t+1 \\ -s+2\cdot t+2 \\ 2\cdot s+2\cdot t+3 \end{bmatrix}$

er være vinkelret på både b og c.

Hvis d skal være vinkelret på både b og c gælder

$\text{dotP}(\mathbf{d},\mathbf{b})=0 \blacktriangleright 9\cdot s+6=0$

$\text{dotP}(\mathbf{d},\mathbf{c})=0 \blacktriangleright 9\cdot t+9=0$

Dette ligningssystem løses med hensyn til s og t

$\text{solve}(\{9\cdot s+6=0,9\cdot t+9=0\},s,t) \blacktriangleright s=\frac{-2}{3} \text{ and } t=-1$

Tilbage er blot at indsætte de fundne værdier i udtrykket for d

$\mathbf{d}|s=\frac{-2}{3} \text{ and } t=-1 \blacktriangleright \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$

I et koordinatsystem i rummet er givet et punkt $P(5,4,3)$. To linjer l og m er bestemt ved:

$$l:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in R$$

$$m:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in R$$

a) Bestem en ligning for den plan α, der indeholder P og l.

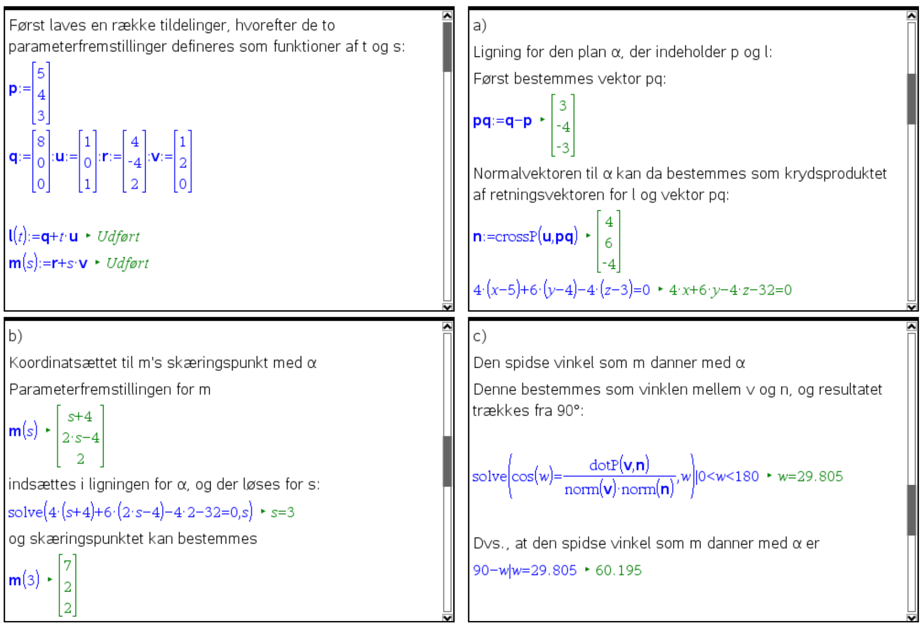
b) Find koordinatsættet til m's skæringspunkt med α.

c) Bestem et gradtal for den spidse vinkel, som m danner med α.

d) Bestem parameterfremstillingen for den linje, der går gennem P og skærer både l og m.

Tip
Du kan naturligvis også benytte skalarproduktet til at bestemme planens ligning:

dotp(**n**,[x;y;z]-**p**)=0


Først laves en række tildelinger, hvorefter de to parameterfremstillinger defineres som funktioner af t og s:

$\mathbf{p}:=\begin{bmatrix}5\\4\\3\end{bmatrix}$

$\mathbf{q}:=\begin{bmatrix}8\\0\\0\end{bmatrix}:\mathbf{u}:=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}:\mathbf{r}:=\begin{bmatrix}4\\-4\\2\end{bmatrix}:\mathbf{v}:=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$

$\mathbf{l}(t):=\mathbf{q}+t\cdot\mathbf{u}$ ▸ *Udført*

$\mathbf{m}(s):=\mathbf{r}+s\cdot\mathbf{v}$ ▸ *Udført*

a)

Ligning for den plan α, der indeholder p og l:

Først bestemmes vektor pq:

$\mathbf{pq}:=\mathbf{q}-\mathbf{p}$ ▸ $\begin{bmatrix}3\\-4\\-3\end{bmatrix}$

Normalvektoren til α kan da bestemmes som krydsproduktet af retningsvektoren for l og vektor pq:

$\mathbf{n}:=\text{crossP}(\mathbf{u},\mathbf{pq})$ ▸ $\begin{bmatrix}4\\6\\-4\end{bmatrix}$

$4\cdot(x-5)+6\cdot(y-4)-4\cdot(z-3)=0$ ▸ $4\cdot x+6\cdot y-4\cdot z-32=0$

b)

Koordinatsættet til m's skæringspunkt med α

Parameterfremstillingen for m

$\mathbf{m}(s)$ ▸ $\begin{bmatrix}s+4\\2\cdot s-4\\2\end{bmatrix}$

indsættes i ligningen for α, og der løses for s:

$\text{solve}(4\cdot(s+4)+6\cdot(2\cdot s-4)-4\cdot 2-32=0,s)$ ▸ $s=3$

og skæringspunktet kan bestemmes

$\mathbf{m}(3)$ ▸ $\begin{bmatrix}7\\2\\2\end{bmatrix}$

c)

Den spidse vinkel som m danner med α

Denne bestemmes som vinklen mellem v og n, og resultatet trækkes fra 90°:

$\text{solve}\left(\cos(w)=\frac{\text{dotP}(\mathbf{v},\mathbf{n})}{\text{norm}(\mathbf{v})\cdot\text{norm}(\mathbf{n})},w\right)|0<w<180$ ▸ $w=29.805$

Dvs., at den spidse vinkel som m danner med α er

$90-w|w=29.805$ ▸ 60.195

d)

Den linje, der går gennem P og skærer både l og m, må gå igennem m's skæringspunkt med α. Vi skal så finde parameterfremstillingen for linjen gennem p og punktet (7,2,2) fra b)

$$\mathbf{l1}:=\mathbf{p}+t\cdot\left(\mathbf{p}-\begin{bmatrix}7\\2\\2\end{bmatrix}\right) \blacktriangleright \begin{bmatrix}5-2\cdot t\\2\cdot t+4\\t+3\end{bmatrix}$$

Altså er parameterfremstillingen

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\4\\3\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}-2\\2\\1\end{bmatrix}$$

I kapitel 16 skal du se, hvordan et bibliotek med rutiner til vektorregning kan opbygges.

16 Differentialligninger

1. ordens differentialligninger

Gennem en række typiske eksempler,vil du se, hvordan symbolsk løsning af en 1. ordens differentialligning foregår på TI-Nspire CAS:

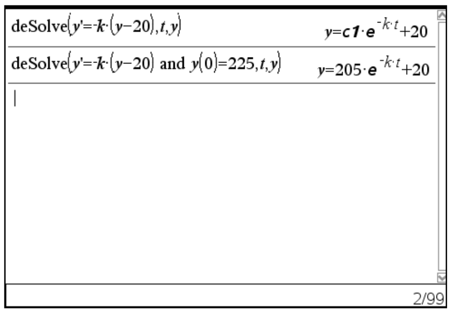
Småkager bages ved 225º. Når de tages ud af ovnen, stilles de til afkøling i et 20º varmt rum. Lader vi *y(t)* betegne småkagernes temperatur til tiden *t*, vil den hastighed, hvormed afkølingen sker, være bestemt ved differentialligningen:

$$y' = -k \cdot (y - 20)$$

Løs differentialligningen og bestem konstanten *k* idet det oplyses, at temperaturen er faldet til 150º efter 1 minut.

Til symbolsk løsning af denne differentialligning skal du benytte værktøjet deSolve (der findes under ∫d 4:Differential- og integralregning ▸ D:Differentialligningsløser.

Obs
Læg mærke til syntaksen i deSolve: Først indtastes ligningen, derefter den uafhængige variabel og til slut den variabel, der skal løses med hensyn til.

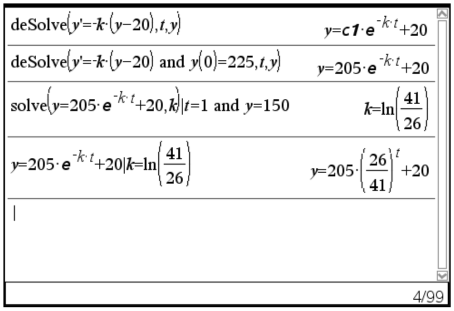


Obs
c1 skal tolkes som en arbitrær konstant. Du kan få værdier fra ***c0*** til ***c255***.

I skærmbilledet ovenfor er ligningen først løst uden bibetingelser af nogen art og dernæst er tilføjet bibetingelsen y(0) = 225.

Ved at tilføje bibetingelsen direkte i deSolve slipper du altså for selv at skulle bestemme den arbitrære konstant ***c1***, der optræder i løsningen uden bibetingelser.

Du mangler blot at bestemme k. Dette sker ved at indsætte $t = 1$ og $y = 150$ i ligningen $y = 205 \cdot e^{-k \cdot t} + 20$, og løse denne mht. k. Dette kan du klare i én indtastning ved brug af givet-operatoren |. Brug også given-operatoren til at indsætte den fundne k-værdi i løsningen:



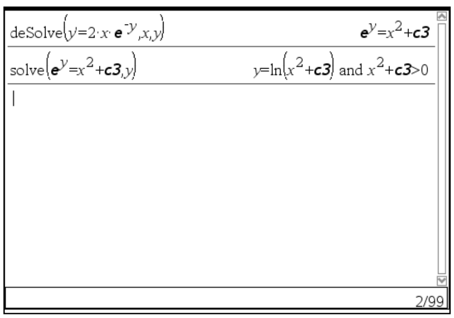
Så let går det dog langtfra altid. Ofte vil deSolve kun give løsningen y til differentialligningen implicit, hvorefter solve kan bruges til at isolere y — om alt går vel.

Løs differentialligningen

$$y' = 2x \cdot e^{y}$$

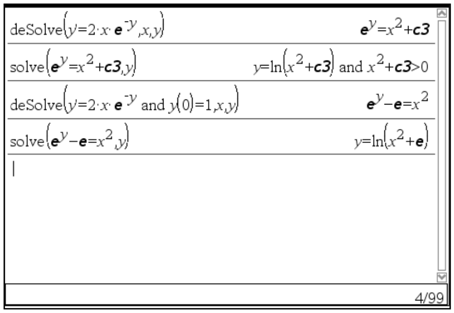
med bibetingelserne hhv. $y(0) = 1$ og $y(1) = -1$.

Som det ses af skærmbilledet nedenfor får du i dette tilfælde kun løsningen givet implicit som $e^{y} = x^2 + c$, hvor c er en konstant, og kun hvis du tvinger maskinen til det, regner den videre:



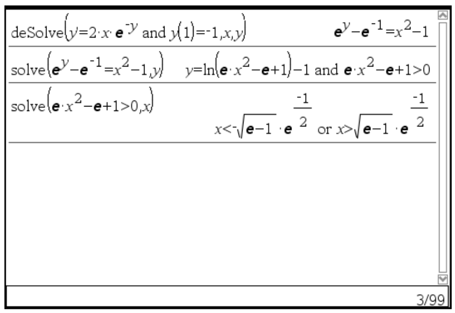
Det er fastlæggelsen af definitionsmængden for løsningerne, som netop fører til undersøgelse af uligheden $x^2 + c > 0$, der giver anledning problemerne.

Tilføj nu bibetingelsen $y(0) = 1$:



Næsten problemfrit. Dog får du også her kun givet løsningen implicit selvom uligheden $x^2 + e > 0$ altid er opfyldt.

Ændrer du bibetingelsen til $y(1) = -1$, er situationen noget anderledes



Her skal uligheden $e \cdot x^2 - e + 1 > 0$ være opfyldt. Denne ulighed er løst på skærmbilledet ovenfor.

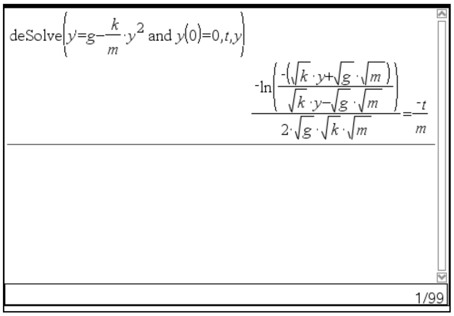
Her ses, at definitionsmængden for løsningen er $Dm(y) = \left]\sqrt{e-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}}, \infty\right[$, da 1 jo ligger i dette interval.

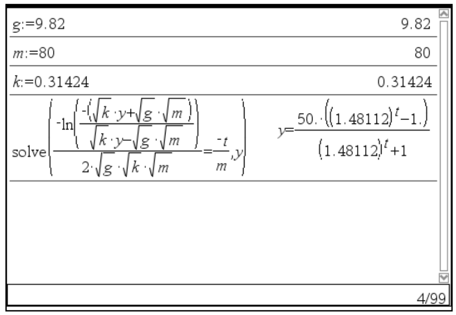
Løs differentialligningen

$$y' = g - \frac{k}{m} \cdot y^2$$

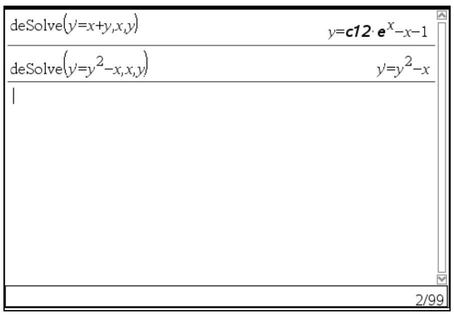
med begyndelsesbetingelsen $y(0) = 0$, hvor $g = 9.82$, $m = 80$ og $k = 0.31424$.

Også her får du kun løsningen bestemt implicit. Du skal selv bestemme y med solve, men inden du gør dette, er det en god ide at tildele værdier til g, m og k:





TI-Nspire CAS kan løse ganske mange differentialligninger af 1. orden — selv en ikke helt simpel differentialligning som $y' = x + y$ går som en leg, men i visse tilfælde må maskinen også give op



Maskinen viser sin overgivelse ved at returnere den oprindelige ligning. Det betyder ikke, at der ingen løsninger er — der er masser. Selvom differentialligningen ser yderst simpel ud, så er det alligevel ikke muligt at udtrykke løsningerne vha. simple funktioner eller integraler af disse. Denne kendsgerning er ikke noget man blot har erfaret — det kan faktisk bevises!

Linjeelementer

Hvis du skal løse en differentialligning af formen

$$y' = g(x, y)$$

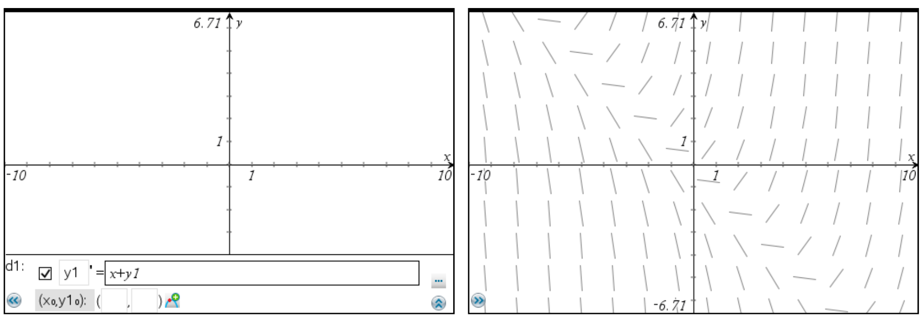
kan du danne dig et overblik over grafens forløb ved at få tegnet linjeelementer til differentialligningen.
Et linjeelement er et lille tangentstykke hørende til en løsning til differentialligningen. Hvis løsningskurven går gennem punktet (x_0, y_0), så vil den i dette punkt have hældningen $s(x_0, y_0)$. Hvis vi tegner et lille linjestykke med denne hældning i punktet (x_0, y_0), vil det derfor give et indtryk af, hvordan løsningen forløber lige omkring dette punkt.

Det er naturligvis et ret omfattende arbejde, idet du skal bruge mange linjeelementer for at få en ide om forløbet, men heldigvis har du TI-Nspire CAS til det grove arbejde.

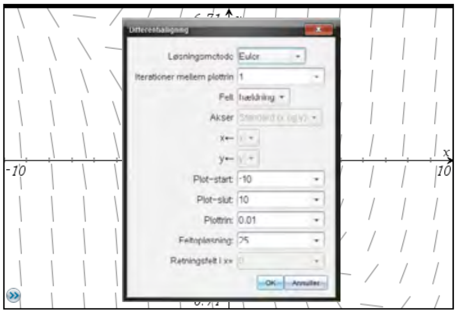
Lad os først se på differentialligningen $y' = x + y$.

Opret et nyt dokument og indsæt et Grafværksted. Vælg indstillingen 6:Graftype ▸ 6:Differentialligninger.

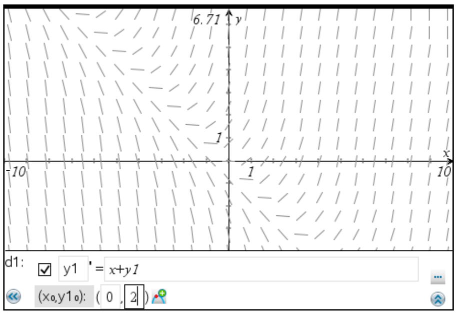
Differentialligningen skal indtastes som $x + y1$ — fordi der er plads til flere differentialligninger. Den næste hedder $y2' =$, osv. Tast Enter, og linjeelementerne tegnes.

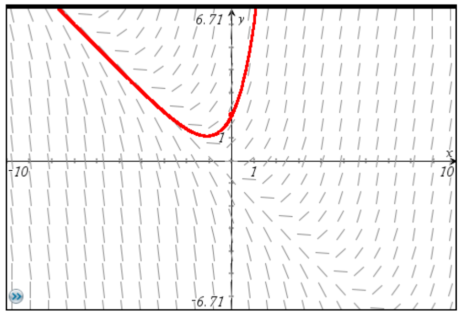


Hvis du vil se flere linjeelementer, kan du åbne indtastningsfeltet (Ctrl+g), pile op for at få den aktuelle differentialligning frem og klikke på det lille felt ... til højre for indtastningslinjen.
Dette vil bringe en dialog frem, hvor du kan indstille flere ting, herunder feltopløsning, der passende kan sættes til 25. Sæt desuden Plottrin til 0.01.

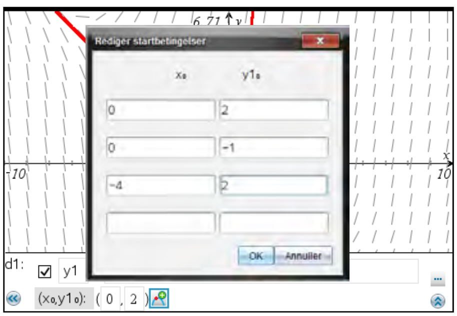


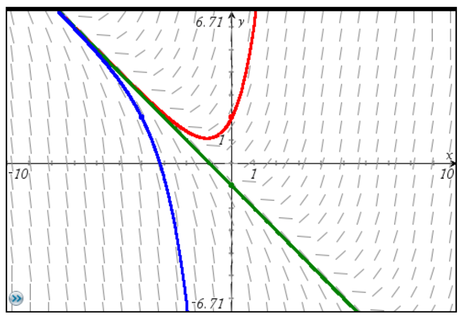
Du kan få indtegnet en løsningskurve sammen med linjeelementerne ved at angive en startbetingelse for denne — dvs. et punkt, løsningskurven går gennem.
Åbn igen indtastningsfeltet (Ctrl+g) og indtast fx startbetingelsen (0,2):





Hvis du vil have tegnet flere løsningskurver skal du klikke på ikonen :



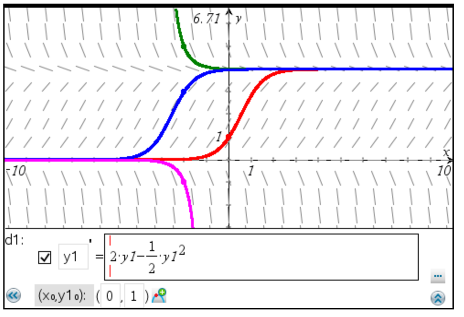


Tegn linjeelementer for differentialligningen

$$y' = \frac{1}{2}y \cdot (4 - y)$$

Og indtegn løsningskurver gennem punkterne $(0,1), (-2,5). (-2,3)$ og $(-2,-1)$

Det færdige resultat vil se sådan ud:



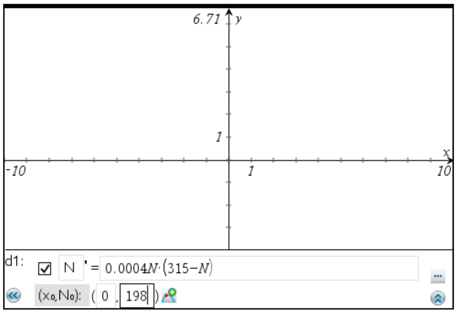
I en model kan udviklingen i biltætheden (målt i antal biler pr. 1000 indbyggere) i Danmark i perioden efter 1968 beskrives ved differentialligningen

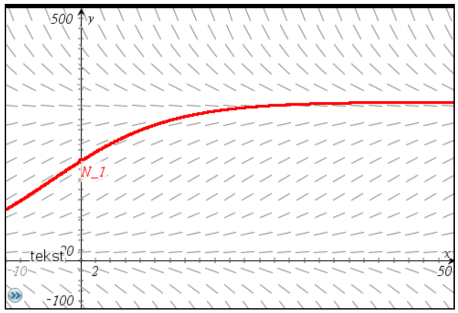
$$N' = 0.0004 \cdot N \cdot (315 - N)$$

hvor N betegner biltætheden til tiden t (målt i antal år efter 1968). Det oplyses, at biltætheden i 1968 var 198.

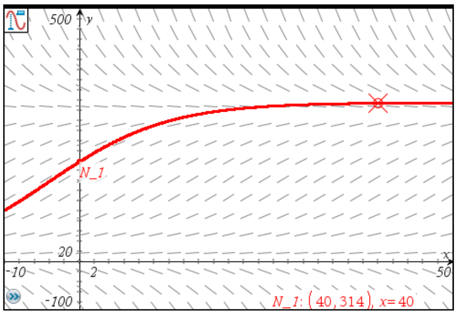
a) Giv ved hjælp af den fundne funktion et skøn over biltætheden i 2008.

Indtast differentialligningen sammen med startbetingelsen $(0,198)$. Du må gerne ændre det y1, der som standard vises, til et N, så differentialligningen kommer til at ligne den givne.
Du er nødt til at ændre vinduesindstillingerne her, så x-intervallet er $[-10,50]$ og y-intervallet er $[-100,500]$ — ellers vil du ikke kunne løsningskurven til noget.
Desuden skal du *ikke* ændre på Plottrin her, men gerne på Feltopløsning.





Vælg nu sporingsværktøjet, og flyt markøren til punktet ned x-koordinaten 40 (svarende til 2008). Husk, at du med sporingsværktøjet aktivt, blot kan indtaste 40 efterfulgt af Enter for at komme til punktet med x-koordinaten 40.



Af skærmbilledet ses, at der i 2008 vil være en biltæthed på ca. 314.

2. ordens differentialligninger

Gennem en række typiske eksempler,vil du se, hvordan symbolsk løsning af en 2. ordens differentialligning foregår på TI-Nspire CAS:

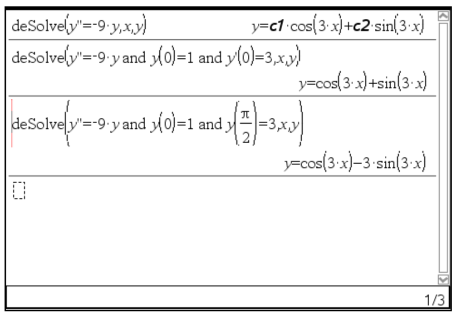
Løs differentialligningen

$$y'' = -9y$$

og bestem den løsning, der

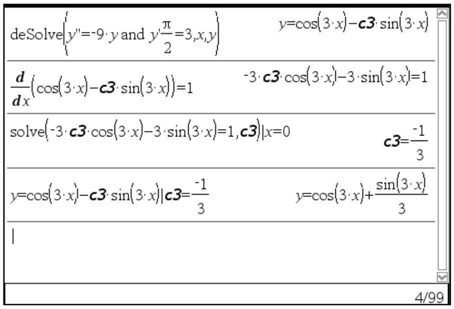
1) går gennem linjeelementet $(0, 1; 3)$
2) går gennem punkterne $(0, 1)$ og $(\frac{1}{2}\pi, 3)$
3) opfylder, at $y'(\frac{1}{2}\pi) = 3$ og $y'(0) = 1$

Løser du differentialligningen uden bibetingelser af nogen art, får du to arbitrære konstanter i løsningen, som du selv skal bestemme. Med bibetingelserne $y(0) = 1$ og $y'(0) = 3$, og med randbetingelserne $y(0) = 1$ og $y'(\frac{1}{2}\pi) = 3$, får du løsningen fuldstændig bestemt:



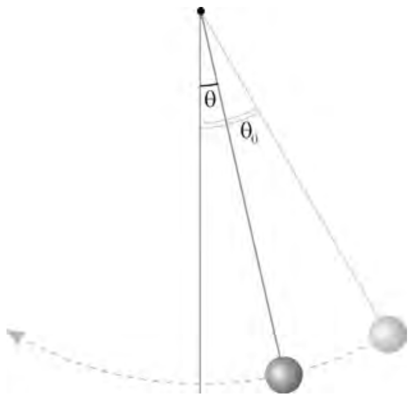
Så simpelt går det ikke i det tredje tilfælde. TI-Nspire CAS vil ikke acceptere to hældninger som betingelse — du får en argumentfejl, så i første omgang må du nøjes med at tilføje den første.
Herefter må du differentiere løsningen *y*, og løse ligningen *y'*(0) = 1 med hensyn til den tilbageværende konstant (her ***c3***):

Obs
Det er nemmest at kopiere ***c3*** fra historikken til solve kommandoen Alternativt kan du indtaste direkte som @c3



Eksempel: Det matematiske pendul

Et matematisk pendul består af et lod med massen *m* ophængt i en masseløs snor med længden L.



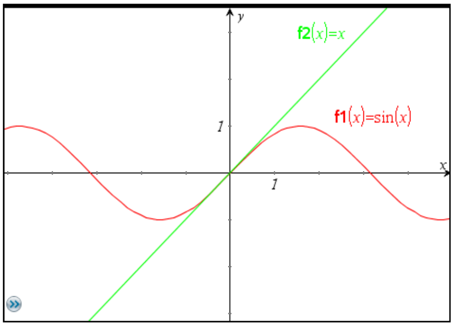
Loddet slippes fra hvile med et startudsving på θ_0. Man kan vise, at udslagsvinklen θ som funktion af tiden tilfredsstiller differentialligningen:

$$\theta'' = -\frac{g}{L}\cdot \sin(\theta)$$

med bibetingelserne $\theta(0) = \theta_0$ og $\theta'(0) = 0$

Denne differentialligning kan ikke løses symbolsk, men for små vinkler kan man lave en god tilnærmelse:

På skærmbilledet nedenfor er indtegnet grafen for sin(*x*) sammen med dens tangent *y* = *x* i punktet (0,0):



Da tangenten og grafen stort set er sammenfaldende tæt ved 0, vil sin(*x*) = *x* i denne omegn, hvor *x* måles i radianer. I praksis skal vinklen blot være mindre end ca. 15º.

Med denne tilnærmelse simplificeres differentialligningen til

$$\theta'' = -\frac{g}{L}\cdot\theta$$

med bibetingelserne $\theta(0) = \theta_0$ og $\theta'(0) = 0$.

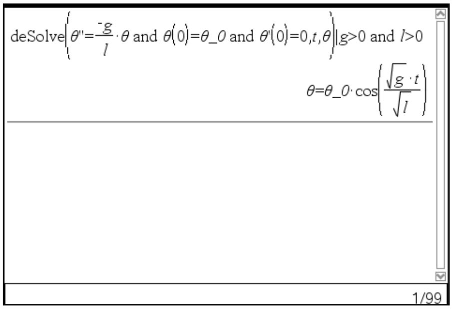
Denne er lige til at løse, omend der er overraskelser undervejs. Ved blot at taste ligningen ind med bibetingelser, får du en noget underlig løsning. Det hænger sammen med, at det ikke kan afgøres, om faktoren $-\frac{g}{L}$ er positiv eller negativ, og det er meget afgørende for løsningens udseende.

Dette kan du undgå ved eksplicit at gøre opmærksom på, at såvel g som L er positive tal ved at tilføje betingelsen

|g>0 and L>0

til deSolve. Hele kommandoen kommer til at se sådan ud:

$$\text{deSolve}\left(\theta'' = -\frac{g}{L}\cdot\theta \text{ and } \theta(0) = \theta_0 \text{ and } \theta'(0) = 0, t, \theta\right)| g > 0 \text{ and } L > 0$$



Perioden i denne harmoniske svingning kan findes ved at løse ligningen

$$\frac{\sqrt{g}\cdot t}{\sqrt{L}} = 2\pi$$

hvorved du finder formlen for svingningstiden for et matematisk pendul (med små udsving):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

17 Et vektorbibliotek

Baseret på den velkendte formel

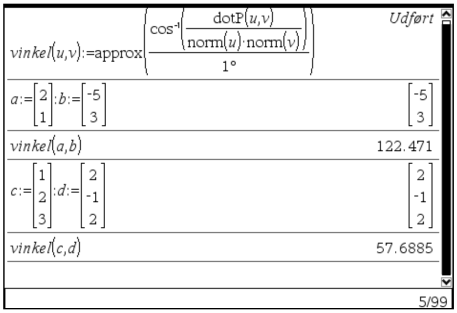
$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

kan du nemt definere en vinkelfunktion, der finder vinklen mellem to vektorer:

Opret et nyt dokument og indsæt et Beregninger værksted. Definer vinklen mellem to vektorer ved

$$vinkel(u,v) := \frac{\cos^{-1}\left(\dfrac{dotP(u,v)}{norm(u) \cdot norm(v)}\right)}{1°}$$

Obs
$\cos^{-1}$ indtastes fx som arccos, men du kan også hente den i Katalog — eller hente tegnet $^{-1}$ i Tegnoversigten.



Tip
Fidusen ved at dividere med 1° er, at du får resultatet ud i grader, selvom indstillingen er Radianer.

I skærmbilledet er vist et lille eksempel på, hvordan det virker. Her bestemmes vinklen mellem to vektorer, og det virker både i 2D og 3D.

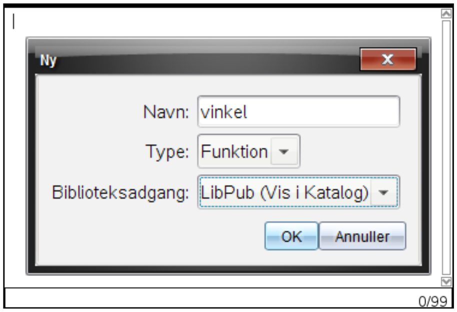
På samme måde kan du definere funktioner, der udfører andre standardberegninger i vektorregning, som fx projektion, afstanden fra punkt til linje osv. Problemet er blot, at disse funktioner kun lever i det dokument, hvor de er defineret.

For at få disse funktioner defineret en gang for alle, og så du kan få adgang til dem i Kataloget, skal der oprettes et biblioteksdokument, hvor funktionerne er oprettet som biblioteksobjekter.

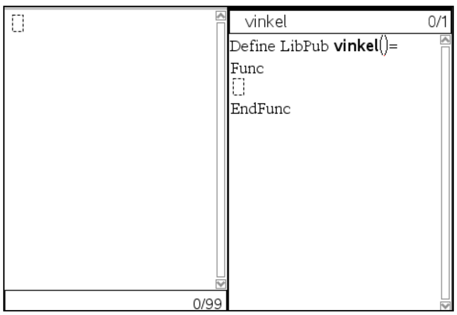
TI-Nspire CAS funktion	Formel
Længden af en vektor v (indbygget) $norm(v)$	
Vinklen mellem to vektorer u og v $vinkel(u,v) := \dfrac{\cos^{-1}\left(\dfrac{dotP(u,v)}{norm(u)\cdot norm(v)}\right)}{1°}$	$\cos^{-1}\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}\right)$
Projektion af en vektor u på en vektor v $proj(u,v) := \dfrac{dotP(u,v)}{dotP(v,v)}\cdot v$	$\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\lvert\vec{v}\rvert\cdot\lvert\vec{v}\rvert}\cdot\vec{v}$
Afstand fra et punkt P til et punkt Q $dist(P,Q) := norm(Q-P)$	$\lvert\overrightarrow{PQ}\rvert$
Afstand fra et punkt P til en plan (med ankerpunkt P0 og normalvektor n) $distp(P,P0,n) := \dfrac{abs(dotP(n,P-P0))}{norm(n)}$	$\dfrac{\lvert\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert}$
Afstand fra et punkt P til linje *l* (med ankerpunkt P0 og retningsvektor r) $distl(P,P0,r) := \dfrac{norm(crossP(r,P-P0))}{norm(r)}$	$\dfrac{\lvert\vec{u}\times\overrightarrow{P_0P}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert}$
Afstand fra et linje *l* til en linje *m* (med ankerpunkter P0 og Q0, og retningsvektorer u og v) $distll(P0,u,Q0,v) := \dfrac{abs(dotP(crossP(u.v),Q0-P0))}{norm(crossP(u,v))}$	$\dfrac{\lvert(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\overrightarrow{P_0Q_0}\rvert}{\lvert\vec{u}\times\vec{v}\rvert}$
Areal af parallelogram udspændt af u og v $areal(u,v) := norm(crossP(u,v))$	$\lvert\vec{u}\times\vec{v}\rvert$

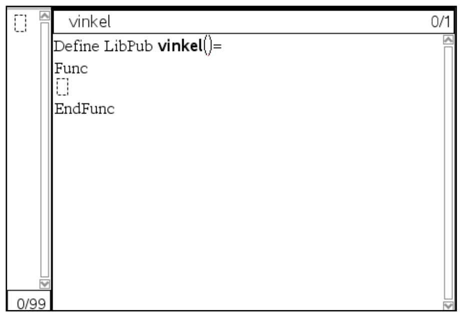
Opret et vektorbibliotek

Opret et nyt dokument og tilføj et Beregner værksted. Vælg 9:Funktioner & programmer ▸ 1:Programeditor ▸ 1:Ny



I Ny-dialogen skriver du navnet på den funktion du vil programmere — her *vinkel*. Type og Biblioteksadgang indstiller du som vist. Tryk OK, og du får dit vindue delt i to: Beregninger til venstre og den (aktive) programeditor til højre. Programeditoren er allerede udfyldt med start og slut på programmet.



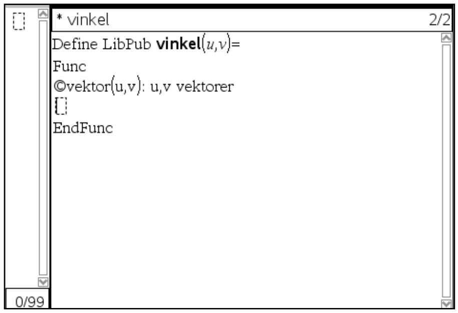


Ved at trække skillelinjen mellem de to vinduer, får du mere plads til at arbejde på i programeditoren. På skærmbilledet til højre er denne ændring foretaget.

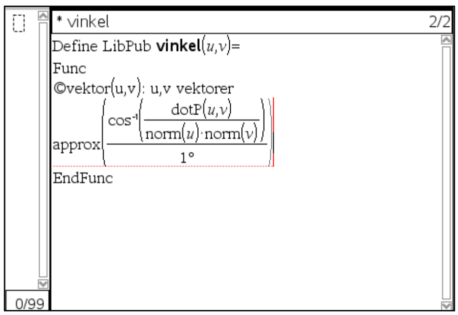
Følg nedenstående punkter for at lave programmet:

1) Indsæt **u,v** i parameterlisten, og flyt markøren til det tomme felt efter Func.

2) Vælg 010 101 1:Handlinger ▸ 8:Indsæt kommentar. Der indsættes © som start på linjen for at markere, at denne linje er en kommentar. Hvad der står her er uden betydning for selve programmet, men det er en god ide at skrive syntaksen for funktionen her. Denne syntaks vil blive vist når du indsætter fra Katalog. Skriv fx vinkel(u,v): u,v vektorer — afslut med Enter:



3) Indtast nu udtrykket, der bestemmer vinklen mellem u og v:

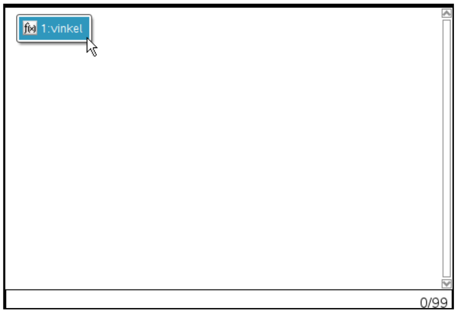


4) Programmet er nu færdigindtastet, men inden det kan gemmes skal programmet checkes for syntaksfejl. Vælg hertil : 2: ▸ Kontroller syntaks og gem. Er programmet i orden, vil du se meddelelsen *"vinkel" blev gemt*, hvis ikke, så vil en dialog informere dig om fejlen, og du må tilbage og rette.

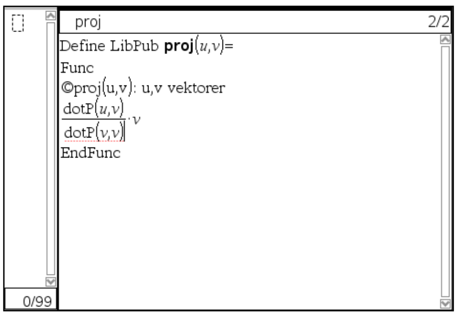
   Luk programeditoren med 010 101 1:Handlinger ▸ D:Luk.

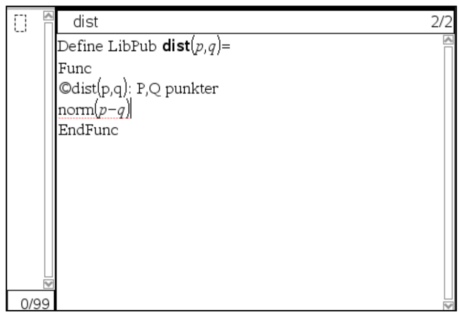
5) Inden du indtaster flere programmer, er det klogt at gemme det dokument programmet er knyttet til. At du har gemt programmet *vinkel* betyder ikke, at selve dokumentet er gemt.
Filen skal gemmes i mappen *MyLib*, der befinder sig som en undermappe til TI-Nspire mappen i Dokumenter. Som filnavn indtaster du *vektor*.

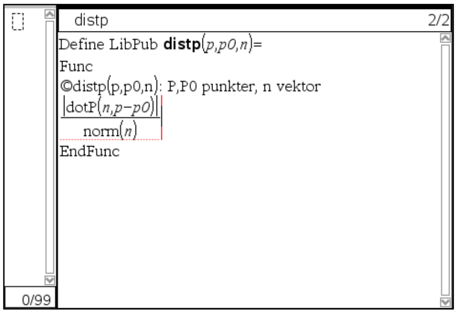
6) Dit dokument vektor består på nuværende tidspunkt af et tomt Beregninger værksted, men med adgang til funktionen *vinkel*. Det kan du se ved at taste 

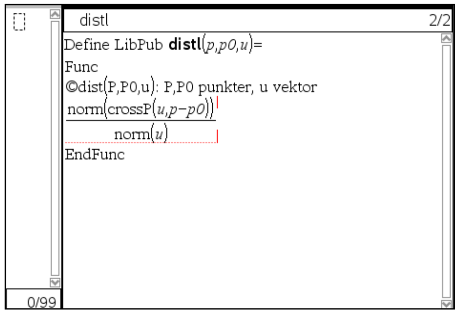


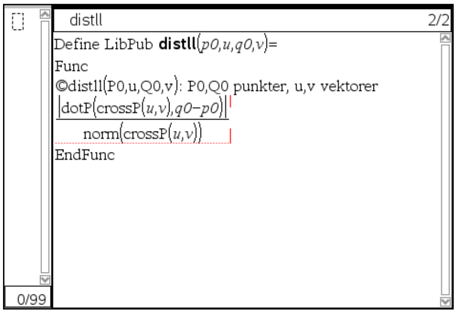
7) De øvrige funktioner indtastes tilsvarende. Nedenfor er blot vist de enkelte skærmbilleder med programmet indtastet

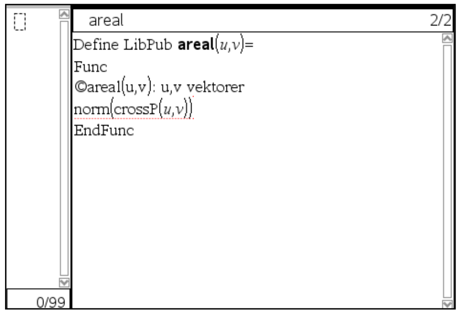


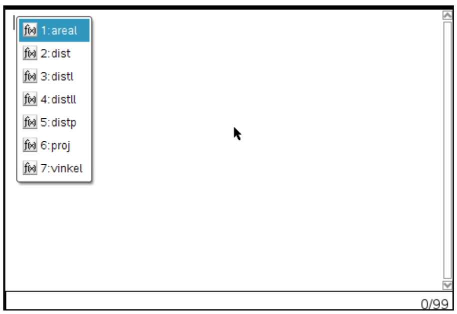










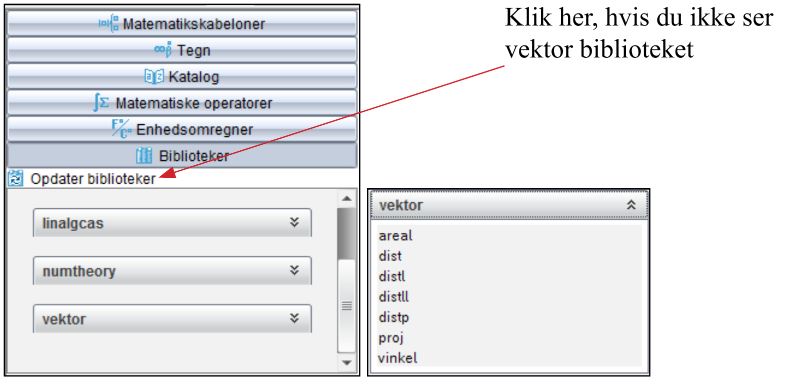


Check, at alle funktioner er på plads ved at trykke på var. Du skulle gerne se en liste som på skærmbilledet ovenfor.
Gem dokumentet *vektor*.

8) Inden du kan bruge funktionerne fra vektor-dokumentet i andre dokumenter, skal du opdatere bibliotekerne.

Tryk 1:Handlinger ▸ 7:Bibliotek ▸ 1:Opdater biblioteker

9) Efter at bibliotekerne er opdateret opretter du et nyt dokument med et Beregninger værksted. Åbn Biblioteker. En liste over biblioteksfiler vil komme frem. I listen skulle du gerne finde *vektor*. Du åbner for indholdet ved at klikke.



Du kan naturligvis udvide dit vektor-dokument med flere funktioner, som tilføjes efter de retningslinjer der er beskrevet ovenfor.

Skal det være rigtig fint, så kan du udstyre dit vektor-dokument med et Noter værksted, hvor du i detaljer beskriver, hvordan de enkelte funktioner virker. Du kan eventuelt søge inspiration i et af de biblioteksdokumenter, der allerede findes på din TI-Nspire CAS.

Eksempel på brug af vektorbiblioteket

I et koordinatsystem i rummet er der givet 3 vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Bestem et gradtal for vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

b) Bestem koordinatsættet til projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{c}$.

Tip
Du kan indsætte vektor\vinkel() ved at klikke på vinkel i vektor-biblioteket

Først defineres de 3 vektorer

$\mathbf{a}:=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}:\mathbf{b}:=\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}:\mathbf{c}:=\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix}$

a)

Vinklen mellem a og b bestemmes

vektor\vinkel(a,b) ▸ 57.6885

Vinklen er således 57.7°

b)

Projektionen, p, af a på c bestemmes

$\mathbf{p}:=$**vektor\proj(a,c)** ▸ $\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix}$

Projektionen, p, af a på c er således

$\mathbf{p}=\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix}$