Carlos Cortés Zavala & Eugenio Díaz Barriga Arceo

Enseñar **la demostración en Geometría** *vs* Enseñar **la demostración en Geometría**

Si usted llegó aquí posiblemente lo hizo porque creyó que había un error de tipografía o que los que esto escriben se equivocaron en el título, pero no es así, no hay tales errores. En cierto sentido usted estuvo en lo correcto al dar un sólo significado a la palabra "enseñar". Pero queremos referirnos a dos interpretaciones posibles de un deber docente. Lo invitamos a que prosiga con la lectura de este artículo.

¿Que es Enseñar? En un primer sentido, muy inmediato, *enseñar* se trata como sinónimo de *dejar ver, de mostrar, de poner a la vista de alguien algo*. Cuantas veces el significado de enseñar se vincula al de la voz usual "enséñame lo que tienes en la mano"; posiblemente dirá ¿ y esto que tiene que ver con el actuar docente? pues bien, ésta forma de *enseñar* es una práctica muy difundida en nuestro medio educativo, ya que tiene de su lado el ejercicio empírico y la tradición de la comunicación oral. Esta *enseñanza* no siempre incorpora propósitos formativos en el alumno tales como: la independencia, la exploración autónoma y menos aún la búsqueda de los contra-argumentos científicos. Al mismo tiempo, una recomendación administrativa frecuente a los docentes se hace en el mismo sentido: "dejemos ver lo que tenemos en la mano". Este enfoque es necesario en muchas condiciones, pero existen algunas otras tareas pendientes por realizar.

Otra interpretación de ¿qué es **enseñar**?, involucra obligaciones en los actores educativos. Bajo esta óptica, **enseñar** es, no solamente dejar ver, sino buscar los métodos o estrategias de que lo enseñado tenga un significado congruente con los fenómenos en estudio. Esto acarrea un compromiso al docente y otro al estudiante: al primero, el diseño de actividades educativas en las cuales el que explore encuentre elementos que le den independencia y formación en un punto de vista científico, a la par hallar ahí universos para crear y explorar con posibilidad de equivocarse y rectificar *(Sagan, 1997)*; por su parte el estudiante debe participar activamente, declinando los argumentos de autoridad y juzgar siempre con criterios científicos *(Sagan, 1996)*, que debe conocer e interiorizar, lo que por supuesto se dará si las actividades propuestas lo permiten.

Y por esto el titulo de este artículo es *Enseñar* la demostración vs **Enseñar** la demostración (muy sintéticamente, dejar ver la demostracíon vs buscar estrategias para que la demostración tenga un significado). Señalado lo anterior, hagamos aquí una revisión de algunos usos docentes en el campo de la Geometría.

La enseñanza de la Geometría que nos trae el docente al aula usualmente se circunscribe a un espacio donde él es quién carga con la tarea de proponer los fenómenos geométricos a estudiar, las condiciones que deben cumplir las figuras, las figuras iniciales y los trazos auxiliares necesarios; tiene, además, la responsabilidad de conocer el camino correcto que nos asegure el tránsito de tierra inhóspita e indómita a puerto cálido, paradisiaco y seguro (muchas dimisiones pueden encontrar aquí razones para justificarse).

¿Cuántas libretas tienen registradas exactamente la misma figura que el profesor ha utilizado para sus argumentos?, ¿cuántos estudiantes reproducen, en su forma de expresión matemática, el estilo del profesor en boga?, y más aún ¿que diferencias hay entre las expresiones utilizadas por el profesor y las expresiones usadas por un estudiante? es decir ¿no serán meras repeticiones del estudiante?. ¿Cuántas veces como profesores nos paramos frente al pizarrón, escribimos el teorema, dibujamos la figura, construimos lo necesario y hacemos la demostración, *enseñamos* la demostración a nuestros estudiantes, es decir, sólo les *dejamos ver* a nuestros estudiantes, cómo actuamos ante este problema y cómo hacemos los pasos necesarios para llegar al resultado que nosotros deseamos, más esto es deseable si nuestros estudiantes fueran expertos y entendieran el por qué de ese actuar. Se menciona en *(Garuti et Boero, 1998)* la necesidad por parte del estudiante de encontrar la "unidad cognitiva de un teorema" y que se basa en la continuidad entre la producción de conjeturas y la posibilidad de construir la prueba *(Garuti et Boero, 1998)* y es aquí donde vemos que *enseñando* no estamos promoviendo esta continuidad.

Para la mayor parte de los casos[1], no existe en ellos ni la certeza de que el teorema dado es algo por demostrar, menos aún verán la necesidad de justificar cada paso. El argumento cae por el peso de la lógica, pero no se interioriza, no se contrasta en distintos dominios al dominio de validez, por ejemplo podemos referirnos a un estudio comparado entre las geometrías euclidiana y no-euclidianas *(Díaz Barriga, E. 1997)*.

Una propuesta que hacemos para transitar de *enseñar* a ***enseñar*** es la incorporación de software educativo de realidad aumentada[2], como Cabri Géomètre II™, que nos apoye para desarrollar habilidades, formales e informales en nuestros estudiantes y que consideramos necesarias para encontrar significado a una demostración; esto como una posibilidad entre muchas otras. El conocimiento de este poderoso software (y de un manejo muy sencillo), por parte de los profesores, nos permitirá encontrar un camino para cruzar de *enseñar* a ***enseñar***, ya que a partir de este "logiciel" (como dicen los franceses) podemos empezar a desarrollar estrategias docentes, las cuales pueden preparar el camino para que nuestros estudiantes entren al mundo complejo y abstracto de una demostración matemática. Las actividades utilizando software dinámico, como Cabri Géomètre II, nos permitirán apoyar al estudiante en la construcción de conjeturas, la evidencia (tal vez una prueba) visual y a partir de allí propiciar el entendimiento y producción de la prueba formal.

---

[1] Si pensamos en estudiantes de bachillerato, donde uno de los objetivos del curso es tener conocimiento del método axiomático.

[2] Software educativo de realidad aumentada. Paquete de cómputo de propósito de aprendizaje en donde los objetos pueden ser percibidos más extensamente (mediante el empleo de longitudes, coordenadas, tablas, ecuaciones, propiedades, etc.). Para Jean-Marie Laborde (conferencia en el Instituto Latinoamericano de Comunicación Educativa -ILCE-, Ciudad de México, Agosto de 1997), el término realidad aumentada se contrapone al de realidad virtual, pues cuando los objetos de realidad aumentada, que se encuentran inmersos en el entorno, se manipulan, manifiestan una gran similitud con respecto a las propiedades de los objetos que emulan, en oposición a aquellos entornos donde los objetos no necesariamente exhiben propiedades que se correspondan con los objetos que emulan.

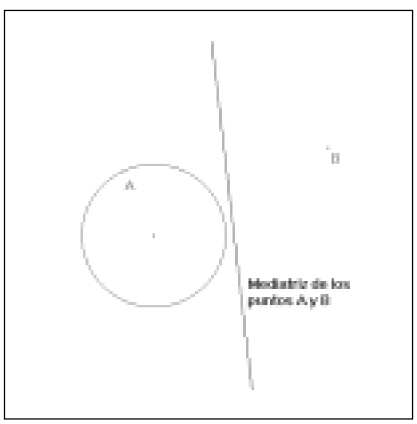
Enseñar **la demostración en Geometría** *vs* Enseñar **la demostración en Geometría** *(continuación)*

Al trabajar con los estudiantes una demostración en Geometría, podemos distinguir, entre otros, varios momentos:

1. La determinación del fenómeno a estudiar.
2. Los recursos de los que se dispone para estudiarlo.
3. La exploración de los componentes del fenómeno.
4. La identificación de relaciones que son útiles entre los componentes de las que son circunstanciales o particulares.
5. El razonamiento formal (que debe tomar en cuenta los hechos experimentales).
6. La búsqueda de invariantes geométricos y generalizaciones del fenómeno en estudio.
   Mostraremos cómo con un paquete de Géometría Dínamica como Cabri Géomètre II™ podemos intervenir didácticamente en cada uno de estos momentos y apoyarnos en él, para **enseñar** la Demostración en Geometría.

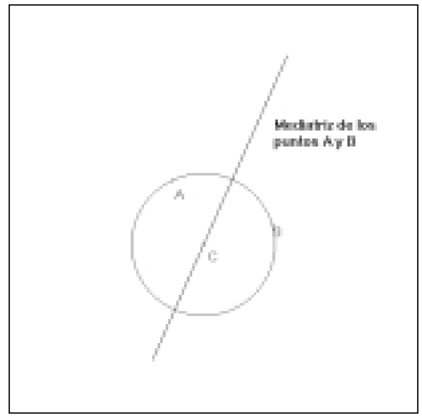
Un ejemplo: explorando la mediatriz con un punto móvil en el plano

Dibuje un círculo de centro O. Después, dibuje un punto A sobre el círculo y otro punto B en cualquier otra parte del plano. Finalmente construya la mediatriz entre los puntos A y B. Aquí los trazos han sido un tanto al azar, casi lo que haría un novato al encontrarse en un entorno Cabri Géomètre II por primera vez. No se trata de dibujar tan sólo sino de explorar, ¿qué se puede descubrir aquí?

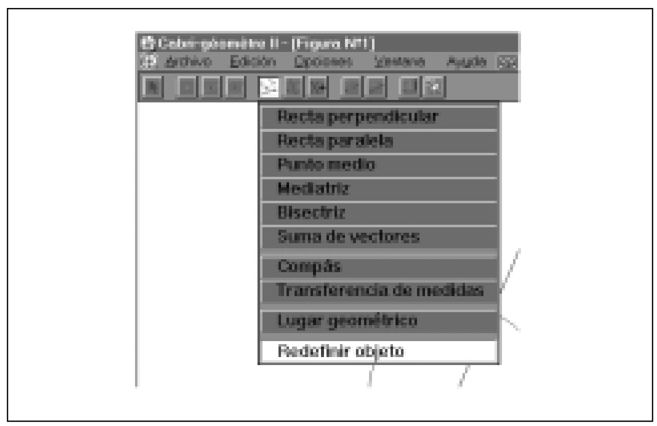


Ya que B es un punto libre en el plano, arrastre el punto por el plano. El docente con experiencia empieza a intervenir: ¿qué tenemos cuando el punto B pasa sobre el círculo?

La manipulación se hace más experta cuando se contrasta el movimiento libre contra el movimiento del punto B perceptualmente sobre el círculo. Aquí nos referimos a que el estudiante sólo usa el arrastre del punto sin vincularlo al círculo aún. Llamamos a este momento *la determinación del fenómeno a estudiar*, pues el sujeto empieza a definir el dominio de validez que le interesa.

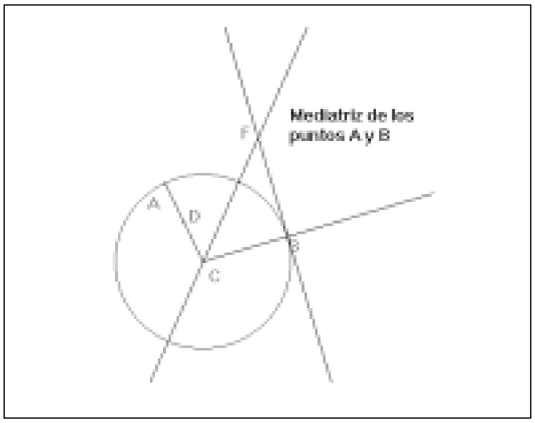


Con la intervención del comando de redefinición de objetos, el estudiante deja el movimiento completamente libre del punto B y lo cambia por un movimiento restringido de B dentro del círculo.



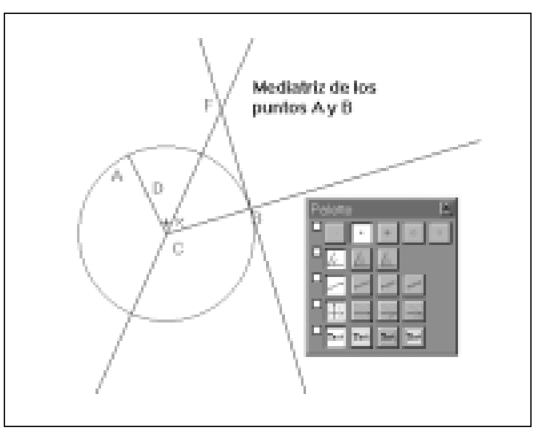
La manipulación de B genera ya una conjetura *perceptual* (indistintamente antes o después de restringir el movimiento de B): la mediatriz entre A y B "se ve que pasa por" el punto C cuando B se mueve en el círculo. Otra intervención del profesor que puede resultar inquietante a los estudiantes: esa relación, ¿depende del radio del círculo o de la posición del centro O del círculo? Y es aquí que el estudiante debe *explorar los componentes del fenómeno*.

El entorno Cabri Géomètre II en extenso contiene comandos que pueden resolver un problema como este desde una perspectiva numérica, desde una perspectiva vectorial, o desde la perspectiva de la geometría analítica, ademas de la perspectiva sintética. Con antelación, el profesor puede elegir qué comandos estarán a disposición del alumno (pueden ser todos o sólo los comandos de la geometría sintética; puede presentarse un entorno vectorial; pueden haber macros o no, etc.), determinando con ello *los recursos de los que se dispone para estudiar el problema*. Aquí el profesor ha diseñando las condiciones del problema.



Toda construcción geométrica entraña el secreto de encontrar los trazos auxiliares que permitan reconocer las relaciones útiles en los elementos del problema. Es aquí donde el alumno ensaya trazando perpendiculares, triángulos, puntos medios, medianas, segmentos, etc. Una intervención en esta dirección no es proponer ya "la" construcción o "el" trazo (es decir, dar sin preámbulo la solución que daría el profesor mismo), sino más bien ayudar a interpretar al estudiante si alguna construcción o trazo propuesto por el mismo, le permite justificar de alguna forma su conjetura perceptual.

En el problema que tomamos como ejemplo, tenemos herramientas para construir triángulos, herramientas para marcar las congruencias de ángulos y segmentos *(Cortes, C., Díaz Barriga, E., 1999)*. El uso de estas marcas puede ser sugerido por el profesor hasta el momento en que se encuentra un argumento matemático convincente que apoye la identificación de algún elemento como objeto congruente con uno previamente construido. Este es un recurso pertinente en la práctica geométrica que no se contrapone con la práctica usual de escritura formal a dos columnas.



En el proceso seguido anteriormente debemos resaltar ***que se busca favorecer con esta actividad la construcción de los teoremas y sus demostraciones***, no como ejercicios que apenas comienzan con la declaración "pruebe que", sino con la formacion de un cuerpo más completo de conocimiento: lo que se ha denominado "Unidades Cognitivas" *(Mariotti et al. PME Lahti 97; Boero, Garuti, Mariotti, PME Valencia 96)*. Procediendo de esta manera, se busca involucrar más al estudiante con la construcción de su conocimiento (mencionemos de paso que los ejercicios del tipo "pruebe que", acarrean el inconveniente de que el alumno debe comenzar por familiarizarse con un lenguaje que no necesariamente es el suyo, con elementos y/o relaciones que no ha explorado y de los cuales puede no contar con referencias). Buscamos, pues, dar *significados* a los teoremas y sus demostraciones.

Así, el terorema y su demostración se encuentran *cognitivamente* en una posición distinta a aquella en la que se hallarían si se partiera de un ejercicio del tipo señalado arriba. Un pequeño examen (para el lector y también para los que esto escriben): ¿puede usted escribir un enunciado y la prueba correspondiente en base a lo desarrollado en esta actividad? Si cree que le hemos hecho trampa, busque algunos estudiantes sin compromiso, propóngales esta secuencia y la tarea formal corres pondiente. ¿Es más difícil?

Una vez que se termina con el ejercicio "fabricado en las condiciones ideales de laboratorio" por el maestro, ¿qué puede revivir de interés en él?.

Aquí hay lugar para la audacia, para preguntas valientes; la Matemática no es una ciencia acabada: la *búsqueda de invariantes geométricos y generalizaciones del fenómeno en estudio*, es una fuente continua de nuevas proposiciones. Y aún en el microuniverso que es el aula (o más todavía, en el plano del conocimiento individual) hay preguntas no resueltas. Se puede probar suerte con otras curvas , hay para todos los gustos: las cónicas pueden ser creadas en este entorno mediante 5 puntos en el plano; los lugares geométricos nos permiten acceder a lemniscatas, cardioides, epicicliodes e hipocicloides, etc. El universo en estudio lo define usted mismo.

Se pueden trabajar condiciones especiales dependiendo del caso. O estudiar la curva que genera el punto medio de la mediatriz cuando un extremo se mueve hacia el otro (o los puntos que dividen en n partes iguales a la mediatriz cuando A esta fijo y B se mueve sobre la curva). Porque después de todo, el sólo llegar a una conjetura perceptual puede dar pie a un esfuerzo intelectualmente interesante.

Enseñar la demostración en Geometría
vs Enseñar **la demostración en Geometría**

(continuación)

Conclusiones

Finalmente, resaltamos dos aspectos: el primero va en relación con la necesidad de hacer consciente cuál es nuestra actividad en el aula como profesores. Esto es ¿queremos *enseñar* o por el contrario nos interesa **enseñar?**

El segundo y no menos importante tiene que ver con la utilización de software de geometría dinámica que nos apoye en nuestra actividad docente; aquí pueden surgir una serie de preguntas entre ellas una muy importante es: ¿cómo se usa el software y que podemos hacer con él?, pero eso, mi querido lector, como se dice en México "es harina de otro costal", lo invitamos a leer el siguiente artículo titulado: **"Ya tengo el software ….y ¿ahora qué?"**

Muchos docentes hoy en día en nuestro país podrían inclinarse aún a pensar que las computadoras en la clase de Matemática son una extravagancia. La Matematica reciente cuenta con ejemplos en donde la computadora fue usada para probar algún resultado (el teorema de los cuatro colores nos ofrece un notable testimonio). En el terreno didáctico, en este artículo hemos expuesto una actividad que ejemplifica cómo se reduce, en un sentido auténtico, la distancia entre un teorema y su demostración, apoyándonos extensamente en el uso de la computadora. Siguiendo a Kemeny, diríamos "si no usas la computadora en el salón de clase estás privando a tus estudiantes de una maravillosa herramienta pedagógica y no los estás preparando para el mundo real".

Referencias

Cortés, C., Díaz Barriga, E., 1999. *Software y quehacer matemático: Los paquetes a través del análisis de las interfaces*. En prensa.

Cortés, C., Díaz Barriga, E., 1999. *Ya tengo el software ….y ¿ahora qué?*, En prensa.

Díaz Barriga, E. 1997. *Geometría euclidiana vs. Geometría no euclidiana: Enseñanza con manipulables y paquetes de Geometría Dinámica. Memorias del Seminario Nacional de Calculadoras y Microcomputadoras en Educación Matemática*. Sonora, México.
http://polya.dme.umich.mx/eventmem/semnal8/Inicio.html

Garuti et Boero, 1998. *Cognitive unity of theorems and difficulty of proof*. En press.

Kemeny, 1992.

Laborde, Jean-Marie 1997. *Conferencia en el Instituto Latinoamericano de Comunicación Educativa -ILCE-*, Ciudad de México, Agosto de 1997. México.

Sagan, C. (1997). *El mundo y sus demonios*. Editorial Planeta. México.

Sagan, C. (1996). *La ciencia como una luz en la obscuridad*. Editorial Planeta. México