

第一届 TI-Nspire 手持技术创新思维解题大赛竞赛试题

学校：台湾国立师大附中 姓名：謝昀佐

知识逻辑总分	思维创新总分

A 卷

本卷共 6 道题，每题 10 分，共计 60 分。

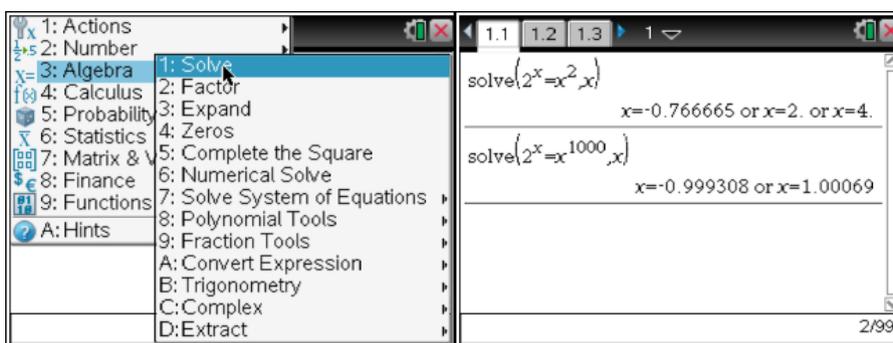
1. 解下列方程：

(1) $2^x = x^2$ (精确到 0.0001 即可)；

(2) $2^x = x^{1000}$ (精确到 0.0001 即可)。

解：

知识逻辑得分	思维创新得分



依照题目要求，可得解：

1. (1) -0.7667, 2, 4

(2) -0.9993, 1.0007

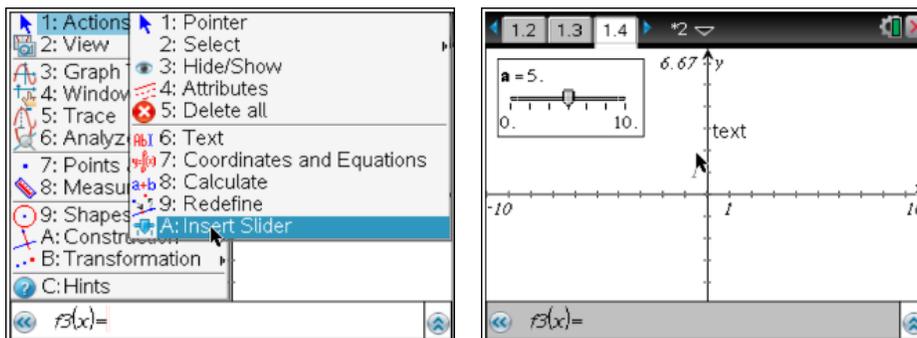
2. 有学生在研究函数 $y = a^x$ 与 $y = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 图象的交点个数时，居然发现当 a 属于一定范围时，它们可以有三个不同交点。

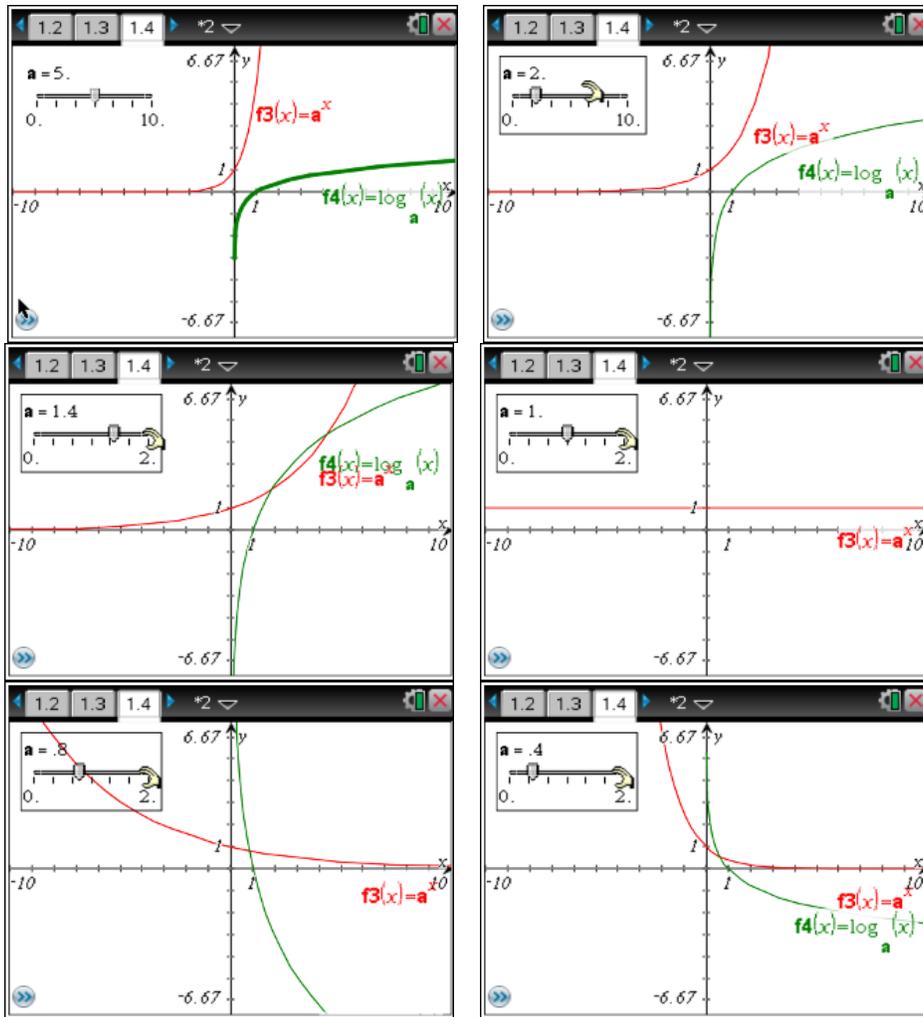
如果这是真的，你能利用 TI-Nspire 图形计算器尝试找出这个范围吗？ (允许误差 ± 0.002)

解：

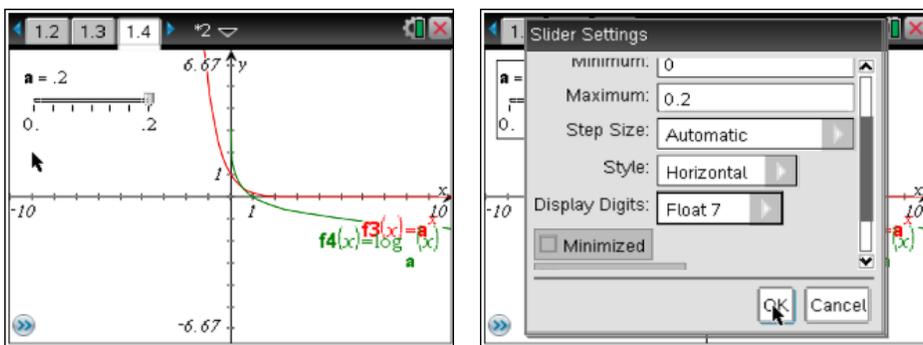
先给定一个可变动数 a ，再画出图形，藉由适当的调整 a 的大小、 a 的区间，逐一逼近所求。

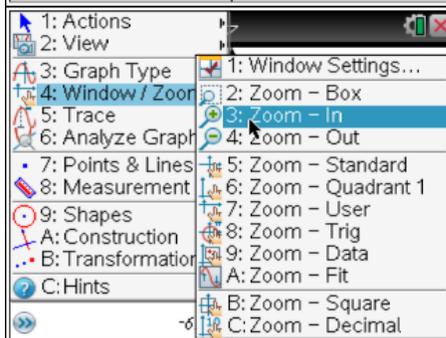
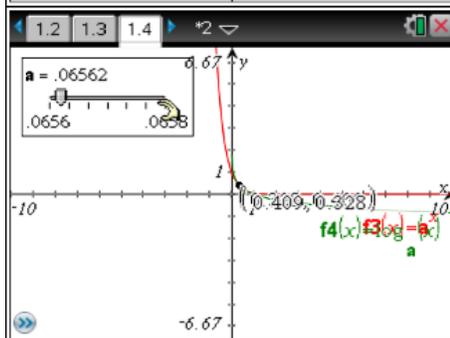
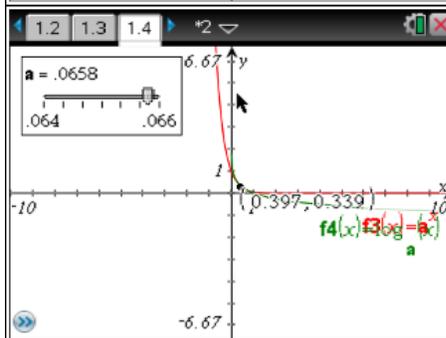
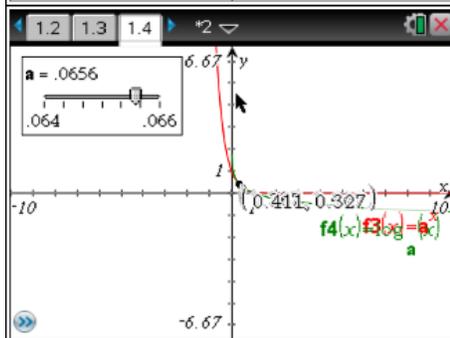
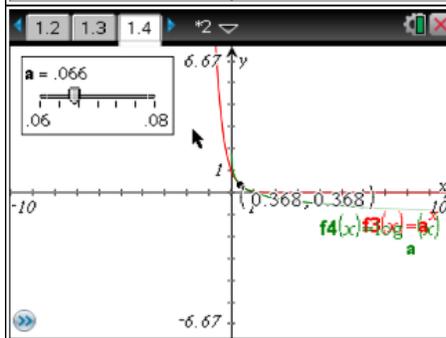
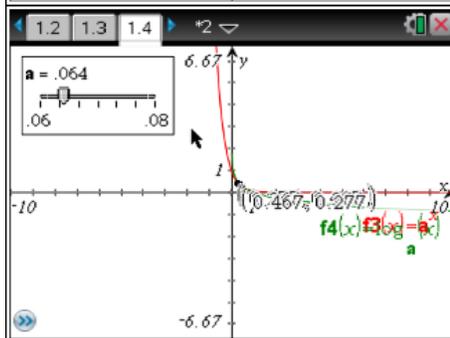
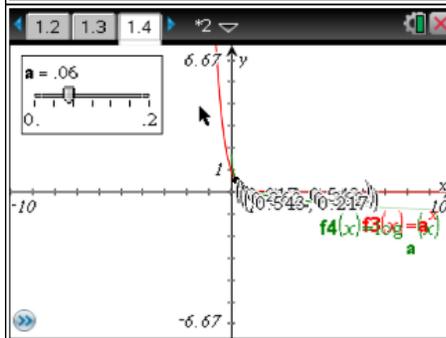
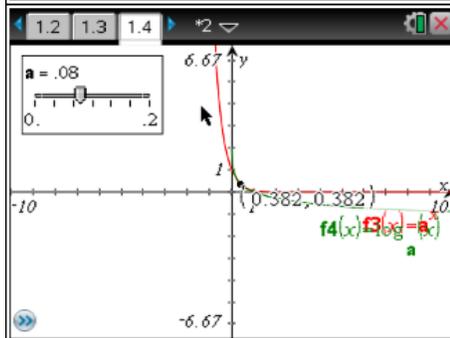
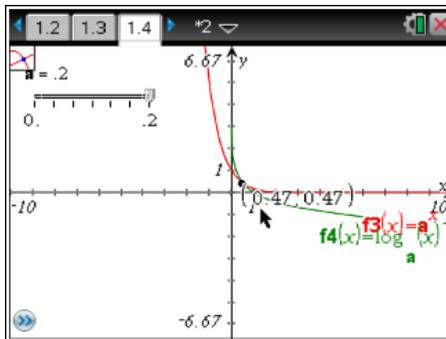
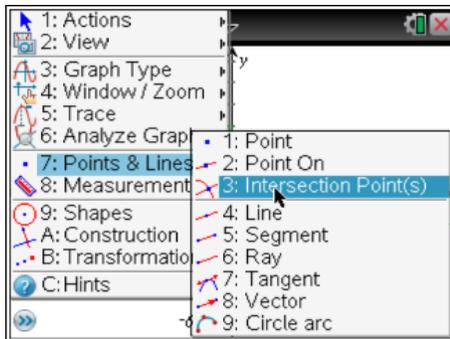
知识逻辑得分	思维创新得分

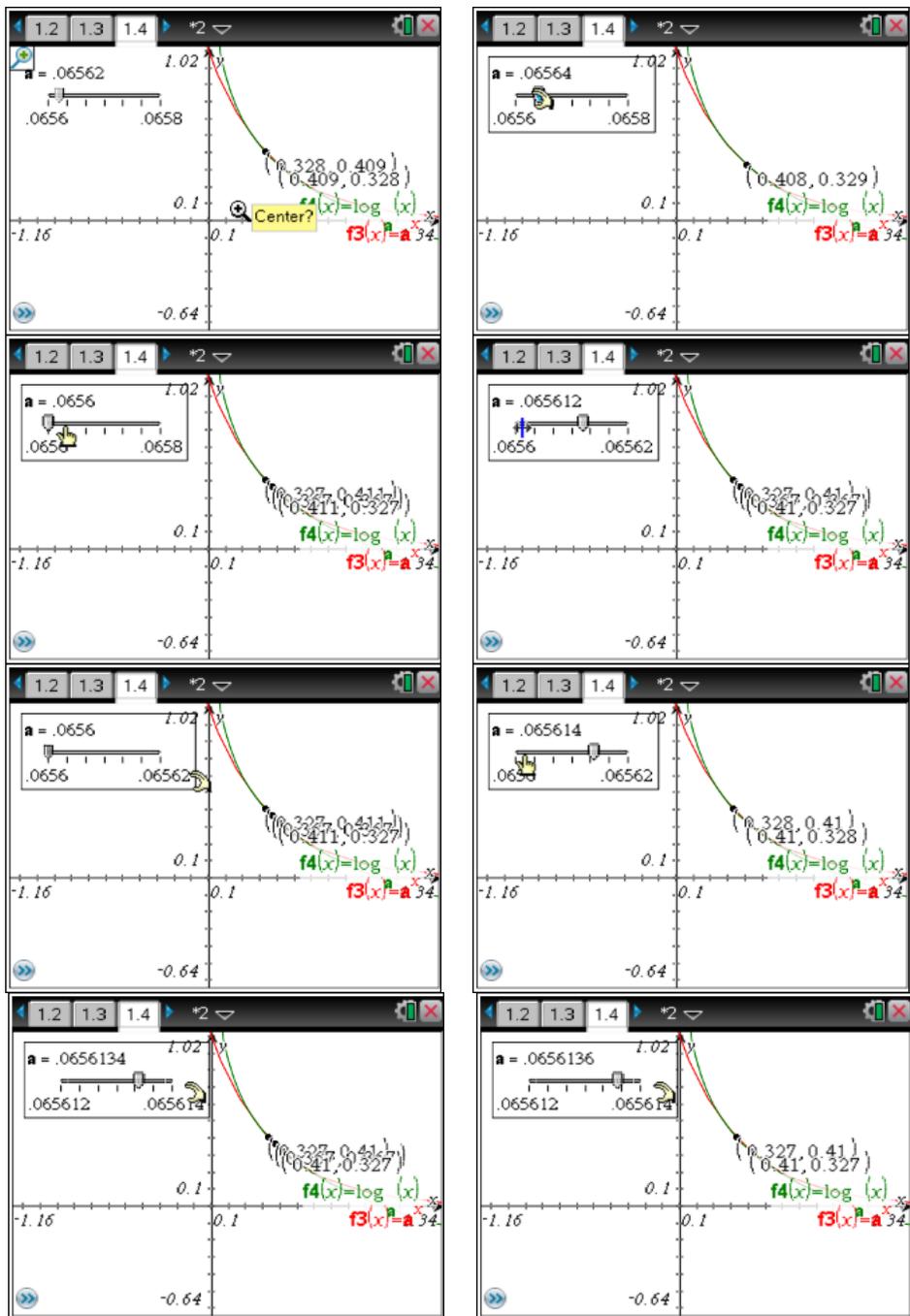




調整精密度、以及點出兩函數的交點。依此方法判斷交點個數。再用上述方法，逐一逼近答案。







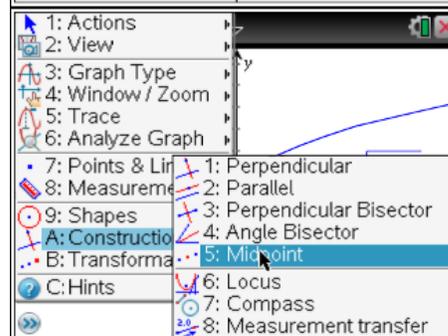
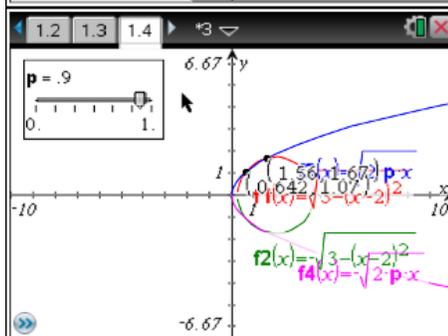
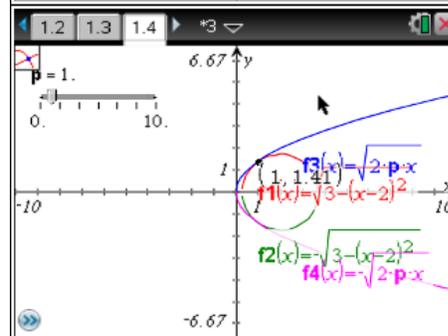
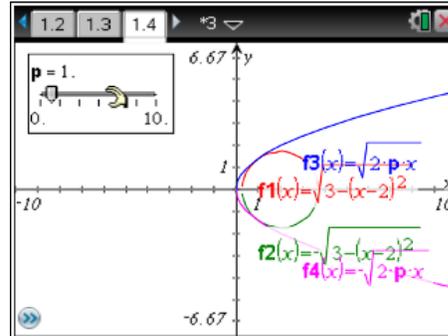
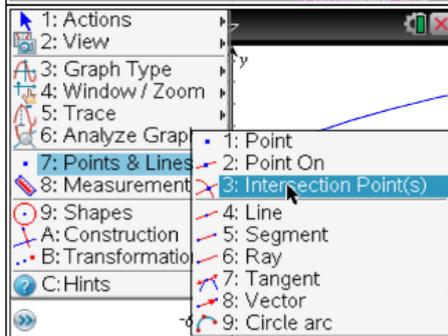
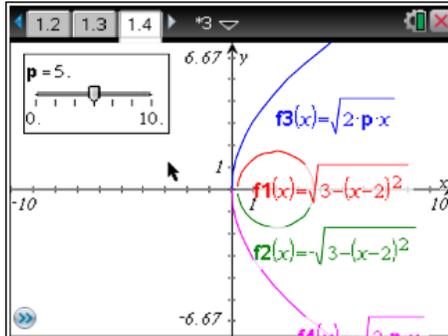
因為 $0.0656134 < x$ 的上界 < 0.0656136
 依題目所要求，可得 x 的上界為 0.0656
 又因為題目已限制 $0 < a$ 且 $a \neq 1$ 。故可知所求為 $0 < a < 0.0656$

3. 曲线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 与圆 $(x-2)^2 + y^2 = 3$ 在第一象限交于 A、B 两点，线段 AB 的中点在直线 $y=x$ 上，求实数 p 的值。（精确到 0.01）

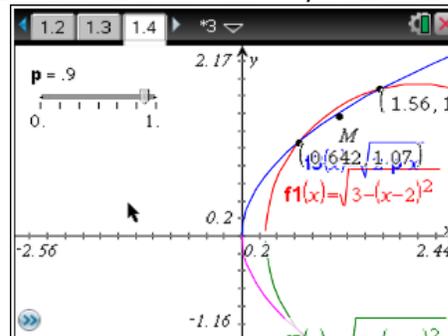
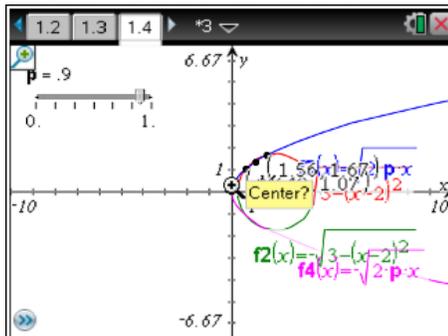
知识逻辑得分	思维创新得分

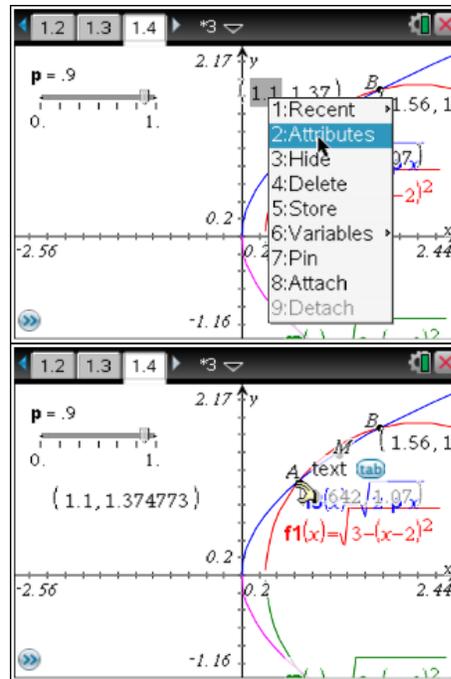
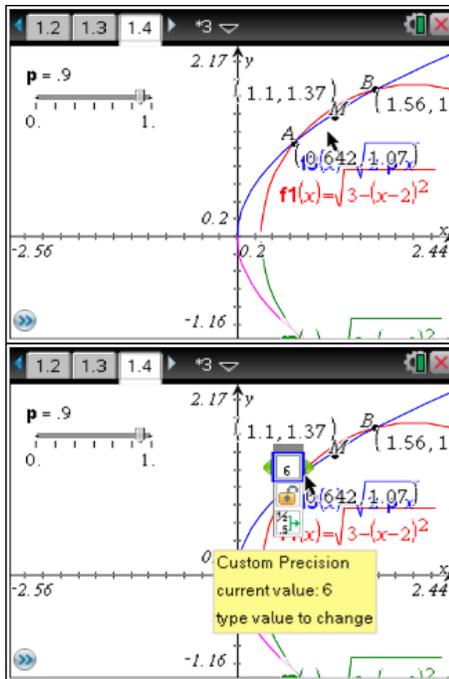
解：

先給定一個可變定數 p ，再畫出圖形，藉由適當的調整 p 的大小、 p 的區間，逐一逼近所求。

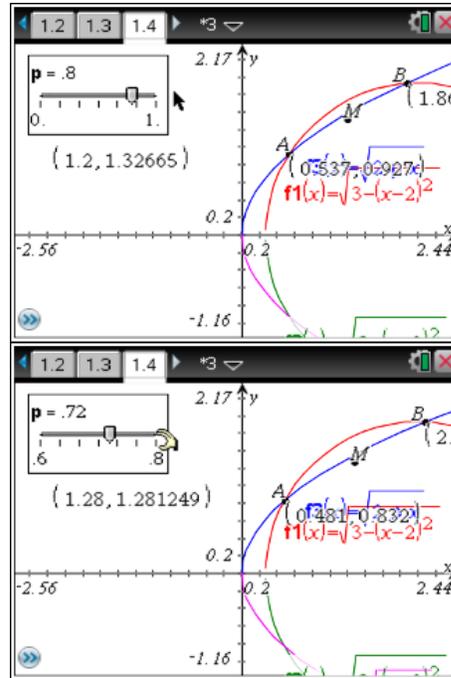
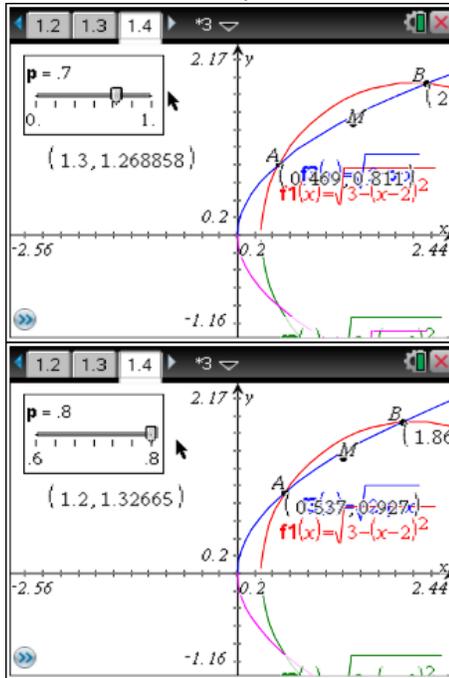


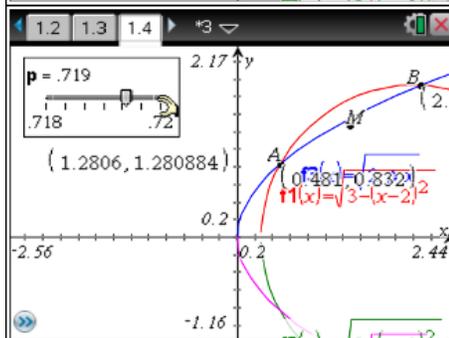
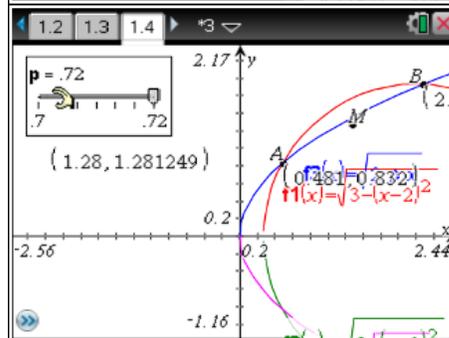
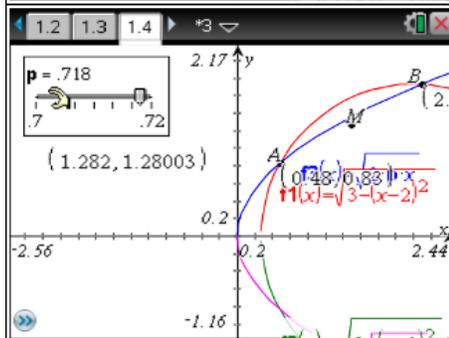
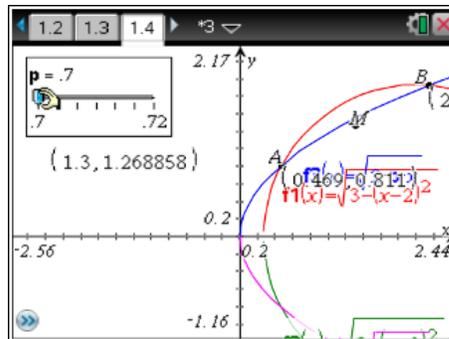
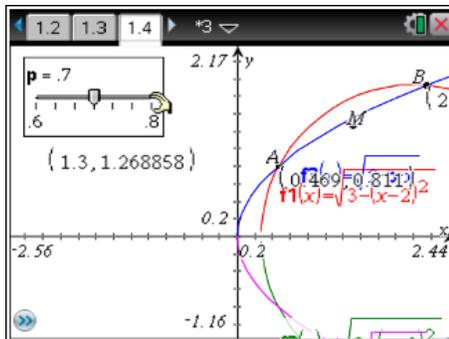
因為需要標上交點字母，所以利用放大功能方便看見中點 M 的 x、y 的座標值。





不斷地逼近，好讓 x 、 y 的座標值越來越接近。

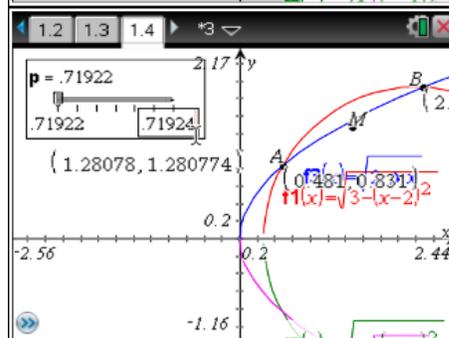
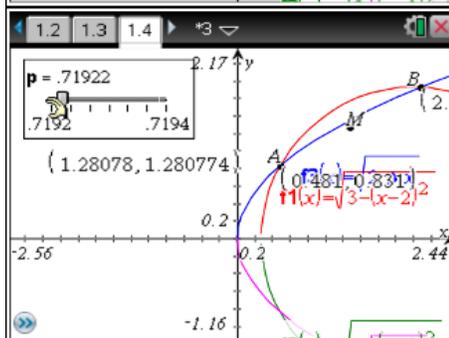
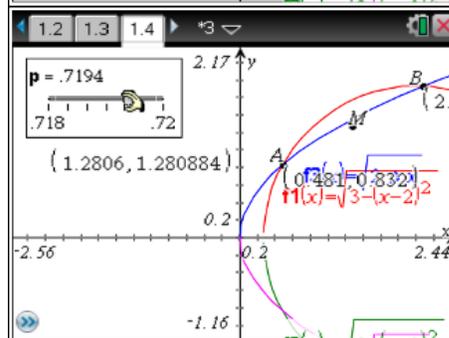
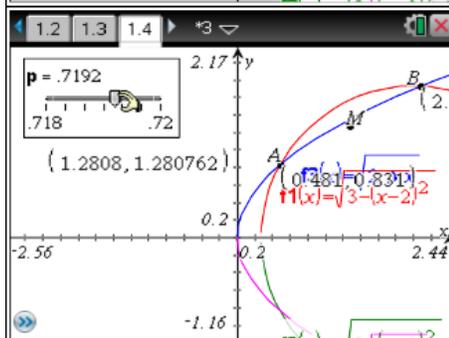


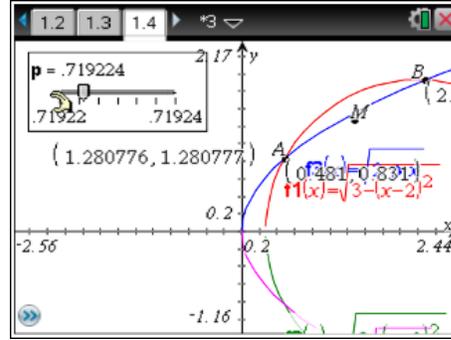
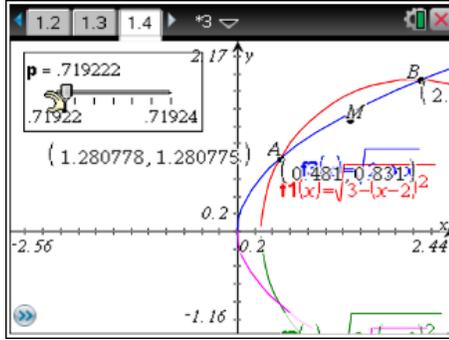


Slider Settings dialog box showing configuration for the slider p .

- Minimum: 0.718
- Maximum: 0.72
- Step Size: Automatic
- Style: Horizontal
- Display Digits: Float 7
- Minimized

Buttons: OK, Cancel





故得 $0.71922 < p < 0.71924$

所以依題目所限制的條件，可得答案為：0.72

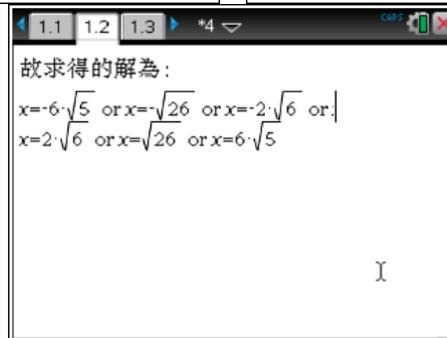
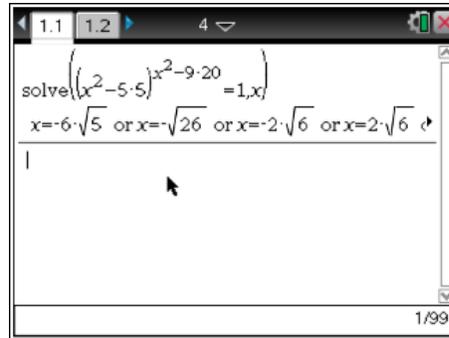
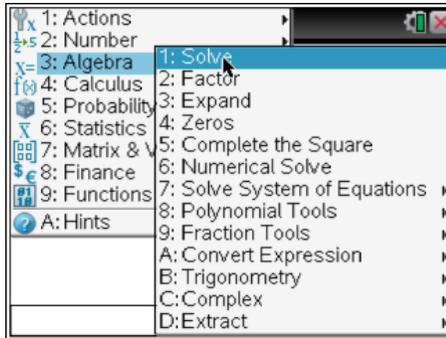
4. 已知方程： $(x^2 - 5 \times 5)^{(x^2 - 9 \times 20)} = 1$.

- (1) 找到該方程的實數解；
- (2) 如何證明該方程沒有其他實數解？

知識邏輯得分	思維創新得分

解：

(1)



(2)

求解方程式 $(x^2 - 25)^{(x^2 - 180)} = 1$ 的實數解

把情況分為(底數為 1 or -1)

當 $x^2 - 25 = 1$ ，可解得： $x = \pm\sqrt{26}$

當 $x^2 - 25 = -1$ ，可解得： $x = \pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6}$

(指數為 0)

當 $x^2 - 180 = 0$ ，可解得： $x = \pm\sqrt{180} = \pm 6\sqrt{5}$

5. 已知正方形 $OABC$ ，顶点 O, A, B 坐标分别为 $(0,0)$ ， $(2,0)$ 和 $(2,2)$ 。 M 是 CB 的中点， N 是 BA 的中点。

(1) 证明： OM 和 CN 垂直，垂足为 K ，且 AK 的长度等于正方形的边长；

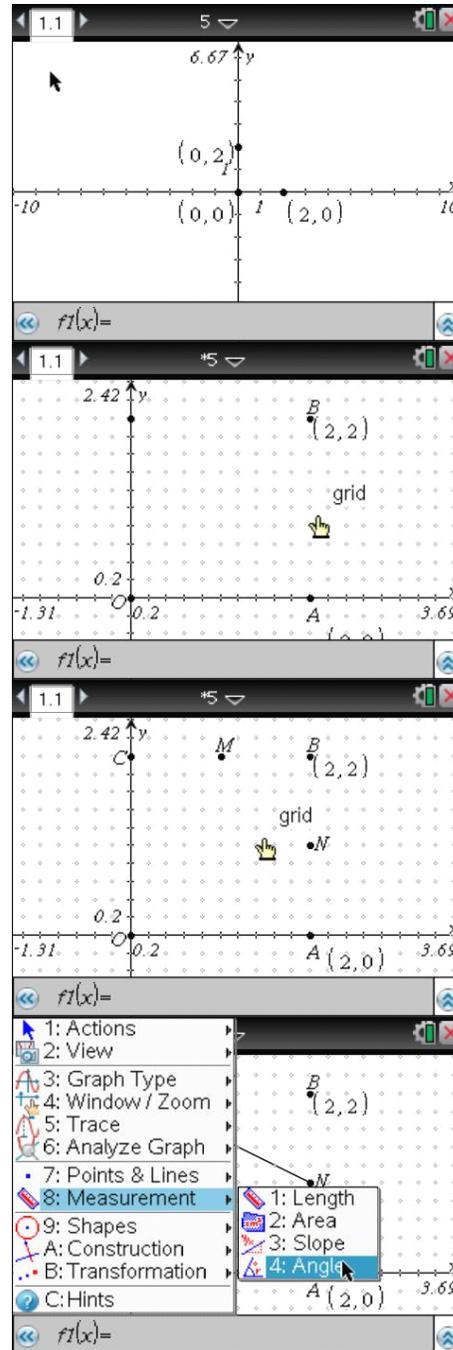
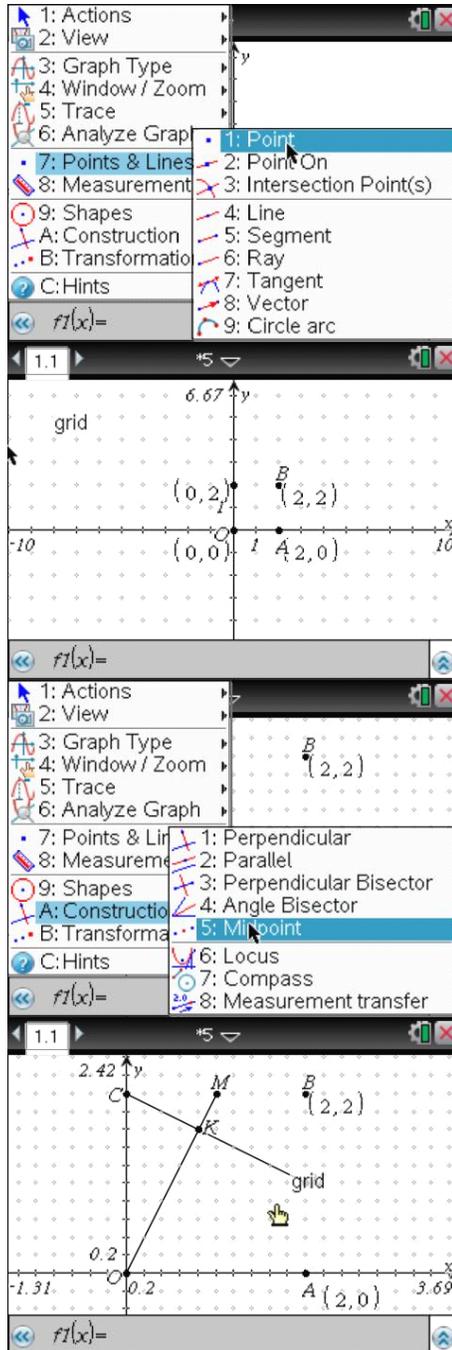
(2) 分别求出 $\triangle CKM$ 和 四边形 $OKNA$ 的外接圆方程。

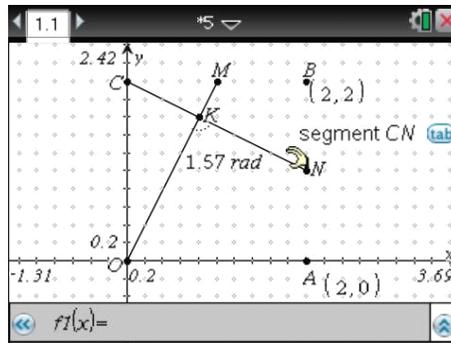
如果 H 是这两个圆的第二个交点，请你分别用代数的方法和几何的方法去证明直线 HK 一定经过 B 。

解：

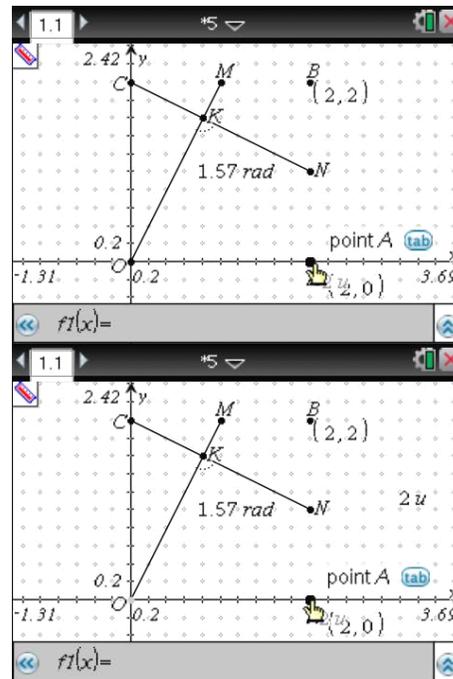
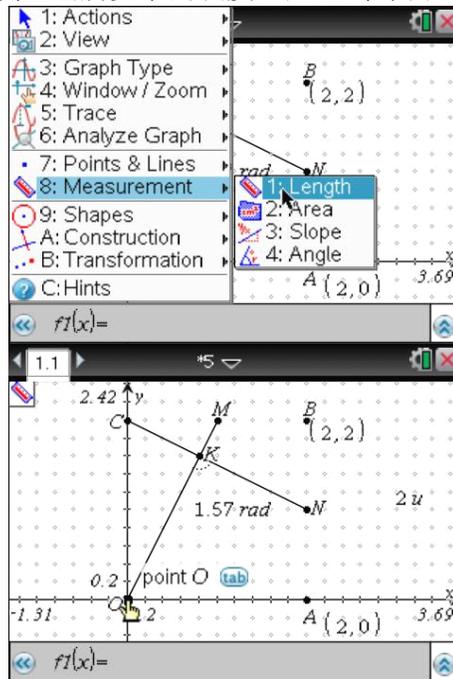
(1) 先畫好圖，量出角度，知道角度是垂直。

知识逻辑得分	思维创新得分



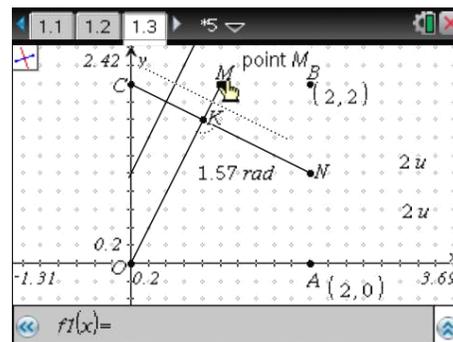
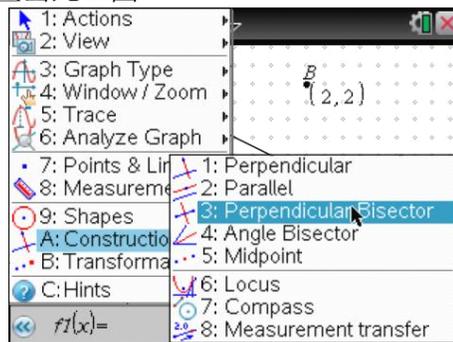


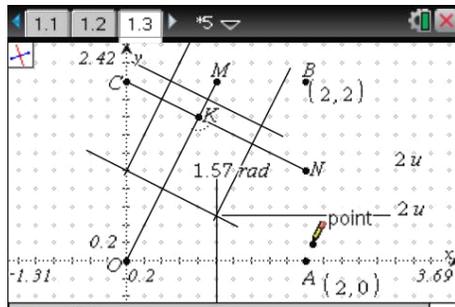
再測量出所要求的長度，知道為等長。



(2)幾何證明方法:

先畫出此二圓

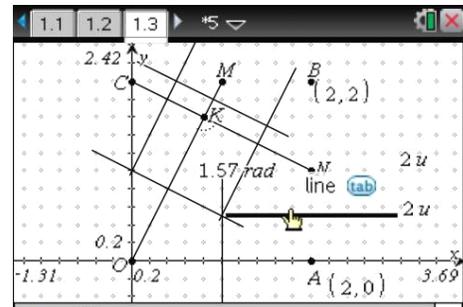




$f1(x)=$

- 1: Actions
- 2: View
- 3: Graph Type
- 4: Window / Zoom
- 5: Trace
- 6: Analyze Graph
- 7: Points & Lines
- 8: Measurement
- 9: Shapes
- A: Construction
- B: Transformation
- C: Hints

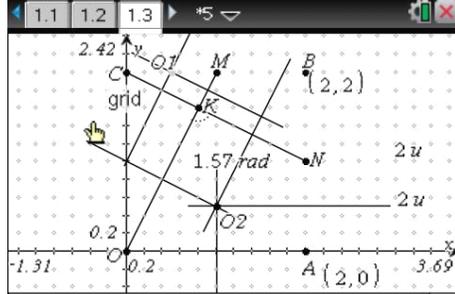
- 1: Point
- 2: Point On
- 3: Intersection Point(s)
- 4: Line
- 5: Segment
- 6: Ray
- 7: Tangent
- 8: Vector
- 9: Circle arc



$f1(x)=$

- 1: Actions
- 2: View
- 3: Graph Type
- 4: Window / Zoom
- 5: Trace
- 6: Analyze Graph
- 7: Points & Lines
- 8: Measurement
- 9: Shapes
- A: Construction
- B: Transformation
- C: Hints

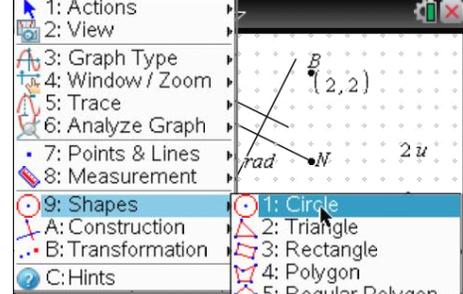
- 1: Point
- 2: Point On
- 3: Intersection Point(s)
- 4: Line
- 5: Segment
- 6: Ray
- 7: Tangent
- 8: Vector
- 9: Circle arc



$f1(x)=$

- 1: Actions
- 2: View
- 3: Graph Type
- 4: Window / Zoom
- 5: Trace
- 6: Analyze Graph
- 7: Points & Lines
- 8: Measurement
- 9: Shapes
- A: Construction
- B: Transformation
- C: Hints

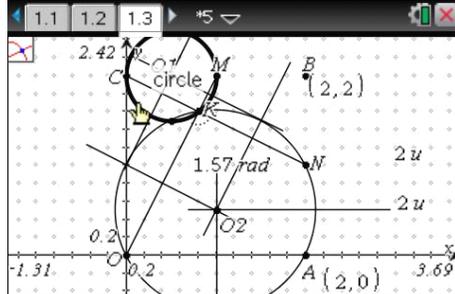
- 1: Circle
- 2: Triangle
- 3: Rectangle
- 4: Polygon
- 5: Regular Polygon



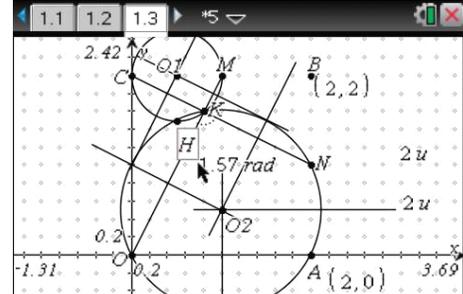
$f1(x)=$

- 1: Actions
- 2: View
- 3: Graph Type
- 4: Window / Zoom
- 5: Trace
- 6: Analyze Graph
- 7: Points & Lines
- 8: Measurement
- 9: Shapes
- A: Construction
- B: Transformation
- C: Hints

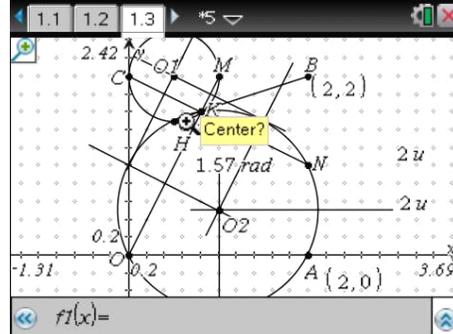
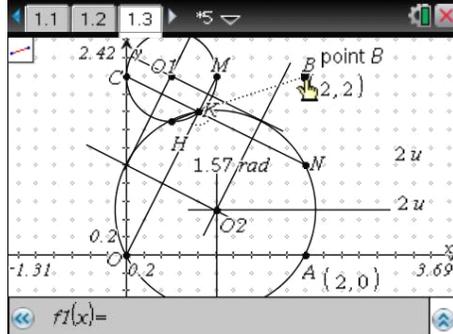
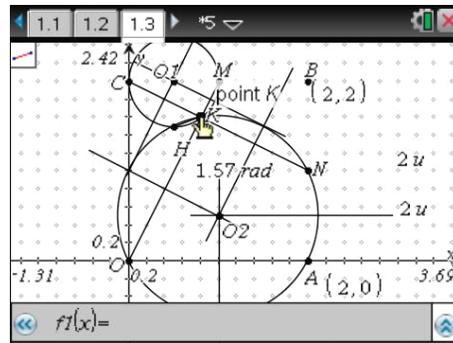
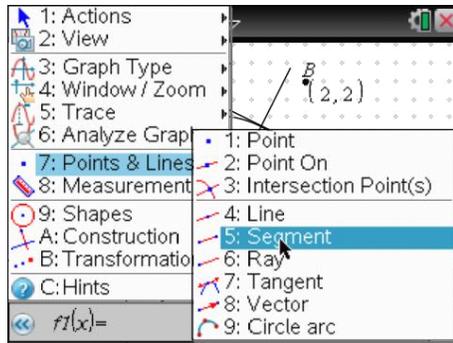
- 1: Point
- 2: Point On
- 3: Intersection Point(s)
- 4: Line
- 5: Segment
- 6: Ray
- 7: Tangent
- 8: Vector
- 9: Circle arc



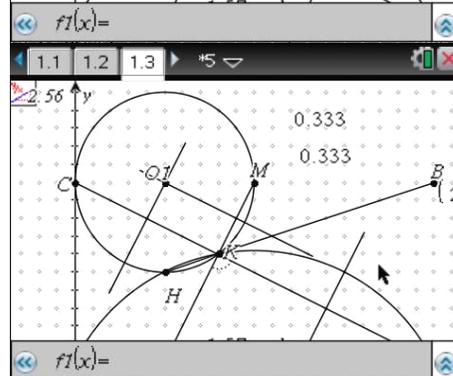
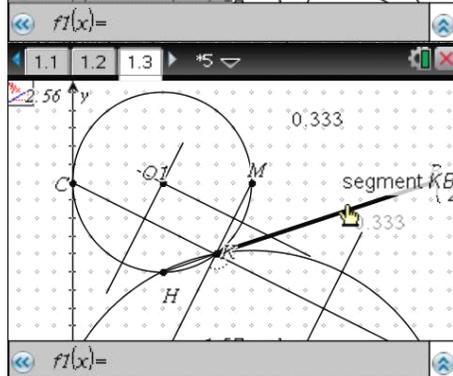
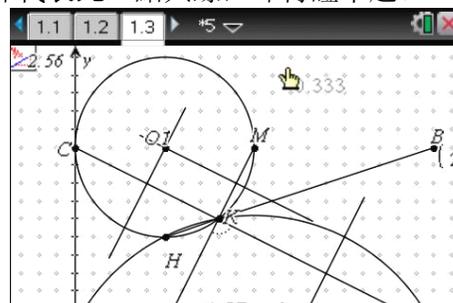
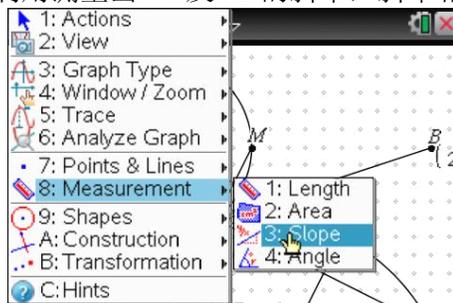
$f1(x)=$



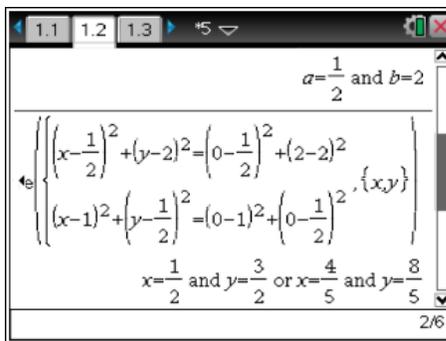
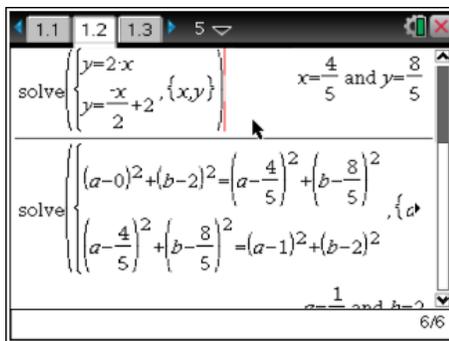
$f1(x)=$



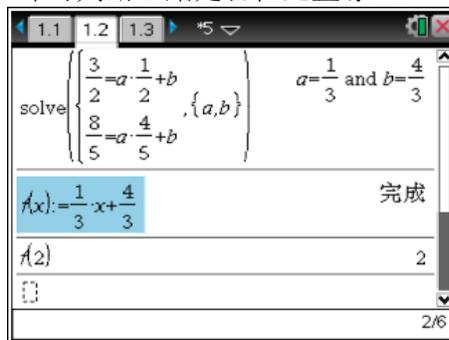
再利用測量出 HK 及 KB 的斜率，斜率相等即代表此三點共線，即得證本題。



代數證明方法：利用點的座標，得到直線 OM 及 AN 的方程式，求的此兩直線的交點 K。再分別求出此二圓的圓方程式，再求得交點 H



故可得 HK 的直線方程式，即可判斷 B 點是否在此直線上。



6. 我們已經學習過反比例函數

$f(x) = \frac{1}{x}$ ，它有如下的圖象性質：

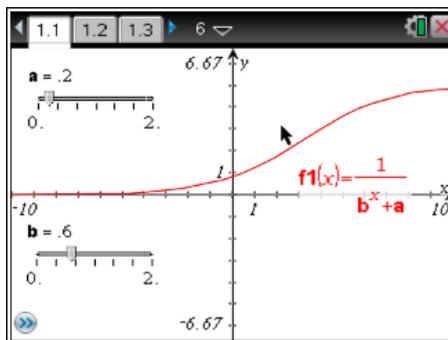
知識邏輯得分	思維創新得分

函數	漸近線	對稱中心
$f(x) = \frac{1}{x}$	直線 $x = 0$ 直線 $y = 0$	(0,0)

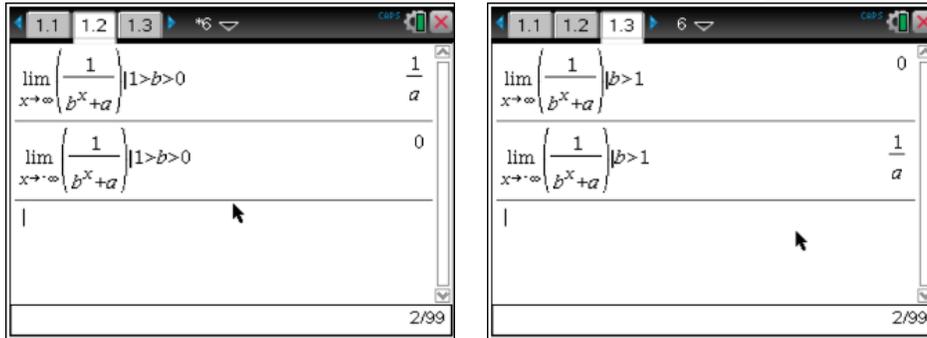
類比研究函數 $f(x) = \frac{1}{b^x + a}$ ($a > 0, b > 0, b \neq 1$) 的圖象性質：

函數	漸近線	對稱中心
$f(x)$		

解：先給定兩個可變數 a,b，再畫出圖形。已知限制： $a > 0, b > 0, b \neq 1$



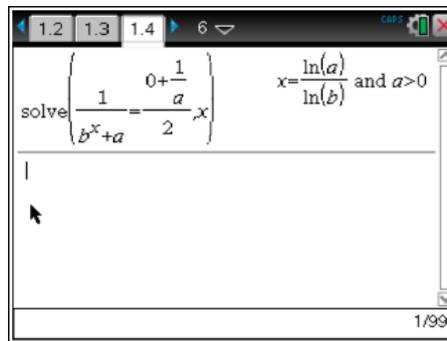
大約嘗試數個 a, b 值後，
 利用計算機，極限的概念，以及把 b 分成兩個情況($a > 1$ or $1 > a > 0$)來討論其漸近線。



接下來要求出此函數得對稱中心了。

知道此(點)對稱中心必在兩漸近線的中間線上，即是 $y = \frac{0 + \frac{1}{a}}{2}$ 。即可解出對稱中心的座標值。

一定可以證明的出來，利用上下左右平移、以及點對稱的定義 $f(x) = -f(-x)$ ，即可得證。



Answer:

函數	漸近線	對稱中心
$f(x)$ ($1 > b > 0$)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{b^x + a} = \frac{1}{a}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{b^x + a} = 0$	$(\frac{\ln a}{\ln b}, \frac{1}{2a})$
$f(x)$ ($b > 1$)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{b^x + a} = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{b^x + a} = \frac{1}{a}$	$(\frac{\ln a}{\ln b}, \frac{1}{2a})$

B 卷

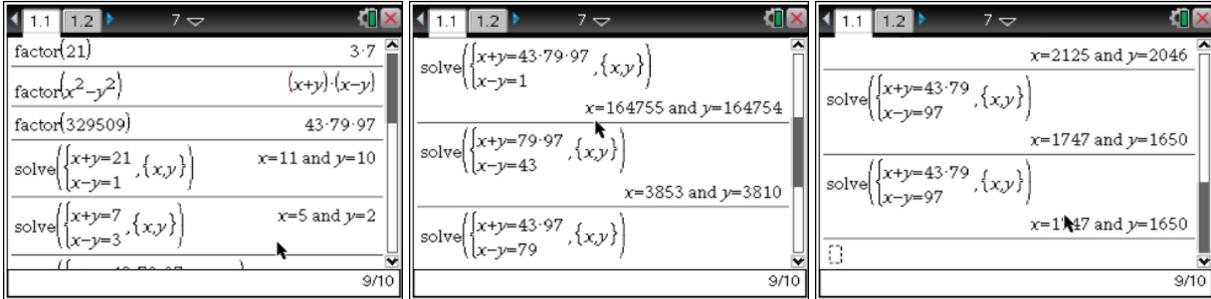
本卷共 2 道题，每题 10 分，共计 20 分.

7. 已知两个不同的正整数 x 和 y ，且 $x > y$.

- (1) 找到 x 和 y ，使其平方差是 21；
- (2) 找到 x 和 y ，使其平方差是 329509；
- (3) 是否存在满足条件的 x 和 y ，它们的平方差是 210？证明你的判断.

知识逻辑得分	思维创新得分

解： (1)(2)



在题目的限制下($x > y$)，可得所求，

(1)(x, y)=

$x=11$ and $y=10$ ，或者 $x=5$ and $y=2$

(2)(x, y)=

$x=164755$ and $y=164754$ ，或者 $x=3853$ and $y=3810$ ，

或者 $x=2125$ and $y=2046$ ，或者 $x=1747$ and $y=1650$

(3) 一樣可以利用上述方法，可發現所有情形皆沒有正整數解。

但是這理想給出一個比較新奇的想法。

知道對任意正整數 k ，有 $k^2 \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{4}$

故 $x^2 - y^2 \equiv 0 \text{ or } 1 \text{ or } 3 \pmod{4}$

(可做一個 2×2 的表格驗證)

(也就是

$0-0 \equiv 0 \pmod{4}$)

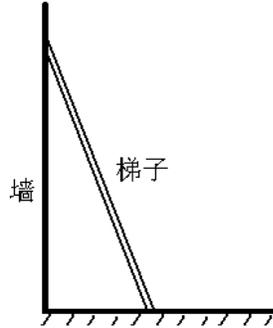
$0-1 \equiv 3 \pmod{4}$)

$1-0 \equiv 1 \pmod{4}$)

但 $210 \equiv 2 \pmod{4}$)

所以只有不存在 x, y 為正整數符合所求。

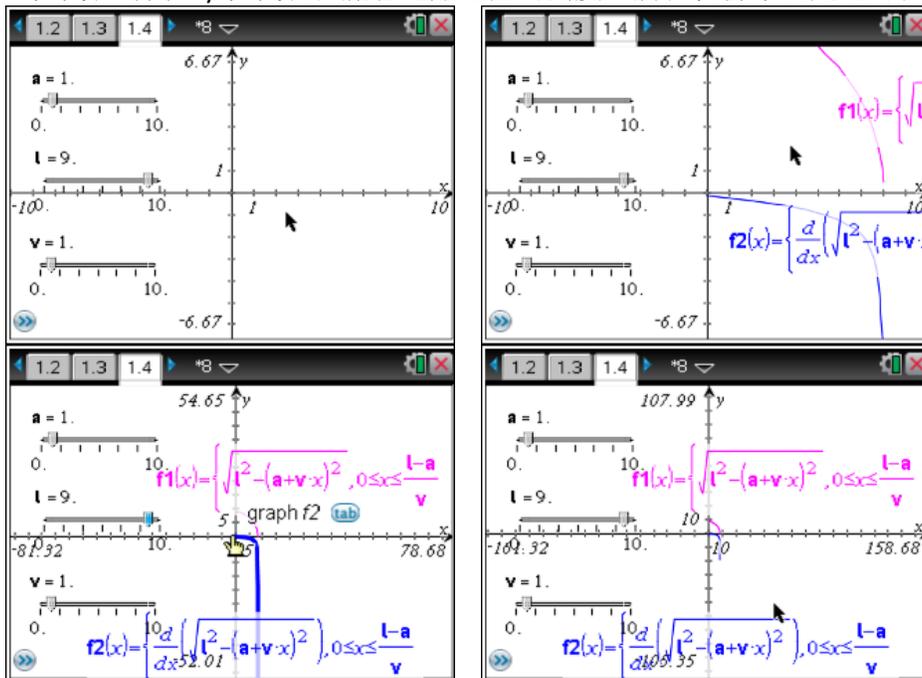
8. 长度为 l 的梯子靠在墙上，梯子底部离墙的距离为 a ($0 < a < l$)，一个冒险者站在梯子的顶端，如下图所示。当冒险者在梯子的顶端时，梯子的底部开始以稳定的速度 v 滑离其初始位置，造成梯子的下降。假设梯子一直紧靠着墙，试用代数及图形的方式来描述冒险者随着梯子下降的路径，并由此决定在什么时候，冒险者跌落的速度最快。



知识逻辑得分	思维创新得分

解:

假设 x 轴代表时间， y 轴代表冒险者距离地面的高度，所以依据毕氏定理可以得图。



所以可知此冒险者落下速度最快為在他即將落地的前一剎那。

其中 v 為負值是因為冒險者正在向下運動，速度為負值。

可以嚴謹的證明出冒險者落下速度最快為在他即將落地的前一剎那。

(即是證明此瞬時速度的函數有絕對遞減的性質)

C 卷

本卷共 2 道题，每题 10 分，共计 20 分。

9. 饮料罐设计



知识逻辑得分	思维创新得分

某个饮料罐的容积大小为 330 毫升。这种罐一般是高度约 115 毫米，直径约 66 毫米，这样的一种标准尺寸，是否就是最优的设计呢？

- (1) 请计算出你认为的最佳尺寸。列出你的任何假设，并解释你的方案为什么正确；
- (2) 如果标准尺寸不是最佳的，请解释为什么现在仍然被采用。

解：(1)在此先假设此数学模型只符合数学上的最佳理想状态，并不考虑是否有物理上的干扰因素。

假设此饮料罐模型为一正圆柱，现在认为最优的设计为使用材料最节省的设计(体表面积最少)。

设此一正圆的半径为 r ，高度为 h ，正圆柱的体积为 v 。

因此可得关系式： $\pi r^2 h = v$

现欲求表面积 $2(\pi r^2) + (2r\pi)h$ 的最小值情形。

$$\text{即是: } 2(\pi r^2) + (2r\pi)h = 2(\pi r^2) + (2r\pi)\frac{v}{\pi r^2} = 2(\pi r^2) + \frac{2v}{r}$$

$$= 2(\pi r^2) + \frac{v}{r} + \frac{v}{r} \geq 3 \sqrt[3]{2(\pi r^2) \left(\frac{v}{r}\right)^2} = 3 \sqrt[3]{2\pi v^2}$$

可知等号发生在 $2(\pi r^2) = \frac{v}{r}$ ，即是 $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$ 。

但是本题所指出的资讯为

$v = r^2 \cdot \pi \cdot h$	$h = \pi \cdot r^2$
$\sqrt[3]{\frac{330}{\sqrt{2 \cdot \pi}}}$	3.74494
$2 \cdot 3.7449385040392$	7.48988

(2)因為還必須要考慮多項因素，比如：物理因素(材料力學的壓力狀態理論)，以及美觀因素。

1.(材料力學的壓力狀態理論)

正圓柱對上下圓盤的壓力為對兩旁的側壓力的兩倍，因此上下厚度，就與側壁厚度不一致了，因此計算所得到的條件、不等式、結果也就不一樣了。

2.液體會因溫度高低影響而熱漲冷縮，若算準恰到好處，有可能在特殊環境下脹大裂開。因此需要計算測量出液體本身以及包裝液體的金屬鋁罐的熱膨脹係數，討論其相關情形即可解決問題。

3.加入液體的機器並非精確度百分之百，仍有誤差值，有可能過裝或少裝，因此要針對此項來做微調。

4.為了銷售需求，應不會算成正圓柱，有時正上方及下方，會經過特殊非線性圖形的設計。因此就有形態上的誤差。可畫出圖表，針對條件，寫下不等式，就可推算出最優的設計。

10. 过山车挑战



知识逻辑得分	思维创新得分

过山车 (Roller coaster, 又称为云霄飞车)，是一种机动游乐设施，常见于游乐园和主题乐园。一个基本的过山车构造中，包含了爬升、滑落、倒转等。过山车是一项富有刺激性的娱乐工具，那种风驰电掣、有惊无险的快感令不少人着迷，过山车虽然惊悚恐怖，但却是非常有安全保障的设施。

你的任务是设计一个超炫的过山车，至少使用 5 个函数模型，从以下 5 个类型中选择：

- ①一次函数；②二次函数；③三次或四次函数；④指数函数；⑤三角函数。

设计要求：

- (1) 为了简化问题，过山车只要求设计成平面图形；
- (2) 你可以使用任何这些函数类型超过一次，但在你的最终解决方案中，必须包含以上所有不同的函数类型。您也可以参数方程来表达你的解决方案；
- (3) 虽然是令人兴奋的乘车需要，它也必须安全的。这意味着，每个不同的函数图形之间的过渡必须是平滑和连续的，你必须仔细地证明每个过渡达到了这个要求；
- (4) 过山车的总长度不得超过 500 米，最大高度小于 120 米；
- (5) 必须提交一个 tns 格式的图形文件，动态的、清楚的来描述一件事：你的模型是如何满足以上所有要求的。

解：每個不同的函數圖形之間的過渡必須是平滑和連續的

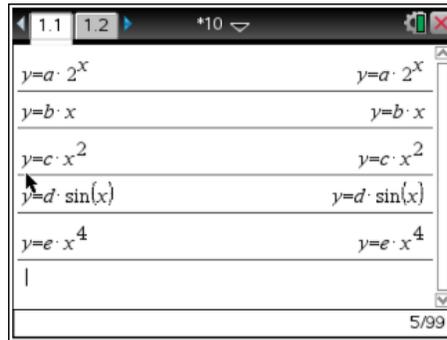
要使用這五個函數

- ① 一次函數；②二次函數；③三次或四次函數；④指數函數；⑤三角函數。

只要確定函數的連接數不間斷，且那點的斜率對相鄰兩函數的斜率相同，就確定了平滑且連續的特性。

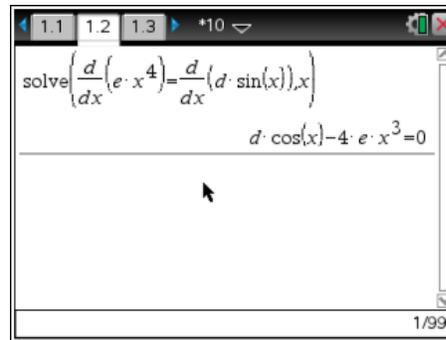
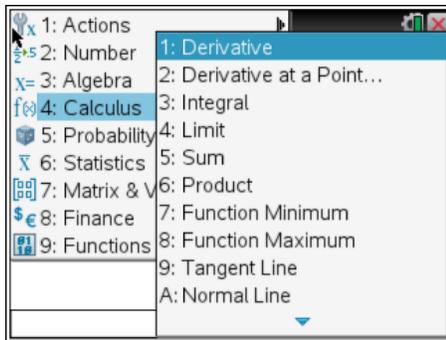
也就是可以解決此題所問的。

為避免檢查函數上是否平滑且連續的麻煩，因此我假設相鄰兩函數的連接處為一固定數
我打算以此五函數來做這題。



打算最後做出成圖為

因此



打算這樣做，以適當的 x 值代入。比如令 $x=\pi$ 或 $-\pi$ ，代入
就可得到 d,e 的關係式。
同理可得 c,d 、 b,c 、 a,b 的關係式。
這樣就可以得到所想要的圖形了。