Cours de probabilité

Bardin Bahouayila

REPUBLIQUE DU CONGO

Institut Africain de la Statistique

(IAS)

Option: HDTS **Année académique** : 2015/2016

PROBABILITÉ

Rédigé par :

BAHOUAYILA MILONGO Chancel Bardin[1]

[1] E-mail : bardinbahouayila@yahoo.fr / bardin.bahouayila@facebook.com
Tel : 05 075 33 71 / 06 837 81 85

INTRODUCTION

La plupart des décisions sont souvent prises en se basant sur l'analyse d'éléments incertains comme par exemple :

- Quelles sont les chances que les ventes baissent si on augmente les prix ?
- Quelle est la probabilité qu'une nouvelle méthode économique augmente la croissance ?
- Quelle est la chance que le projet soit efficient ?
- Quelles sont les probabilités qu'un nouvel investissement soit rentable ?

La probabilité est une mesure numérique de la vraisemblance de l'occurrence d'un événement. Ainsi, les probabilités peuvent être utilisées pour mesurer le degré d'incertitude associée aux quatre événements cités ci-dessus.

La valeur de la probabilité est toujours comprise entre 0 et 1. Une probabilité proche de zéro signifie qu'un événement à peu de chance de se produire. Quand elle est égale à zéro, on dit que l'événement est incertain. Une probabilité proche de 1 signifie qu'un événement se produira très certainement. Quand elle est égale à 1, on dit que l'événement est certain. Dans le cas où la probabilité est égale à 0,5, on dira que l'événement a autant de chances de se produire que de ne pas se produire (on est dans ce cas indécis).

L'objectif de cette partie du cours est de présenter aux étudiants une introduction conceptuelle aux probabilités et à leurs applications. Cette partie comporte quatre chapitres permettant aux étudiants d'apprendre, de comprendre et d'appliquer des exercices d'entrainement qui cadrent avec le domaine qu'ils ont choisi. Ces quatre chapitres traitent de l'expérience et des événements, de la théorie des probabilités, du calcul des probabilités et du théorème de Bayes.

Chapitre 1 : EXPÉRIENCES ET ÉVÉNEMENTS

La probabilité a une théorie, cette théorie est une branche des mathématiques qui s'attache à mesurer ou à déterminer quantitativement la chance qu'a un événement ou une expérience d'aboutir à un résultat donné.

La théorie de probabilité utilise souvent les résultats de **l'analyse combinatoire** et notamment les dénombrements appelés permutations, arrangements et combinaisons. Elle constitue la base de tous les travaux en probabilités.

Cependant, avant d'étudier l'analyse combinatoire, nous allons d'abord apprendre les bases de la probabilité.

1.1 EXPERIENCE ET UNIVERS

En termes probabilistes, une **expérience** est un processus qui génère un ensemble de résultat prédéfini. Lorsque l'expérience n'est pas répétée, un seul des résultats possibles de l'expérience se produit.

Plusieurs exemples d'expériences, et leurs résultats possibles sont présentés ci-dessous.

EXPERIENCE	**RESULTAT DE L'EXPERIENCE**
Lancer une pièce de monnaie	**Pile (P), Face (F)**
Lancer deux pièces de monnaie	**(P, P); (P, F); (F, P); (F, F)**
Lancer deux fois une pièce de monnaie	**(P, P); (P, F); (F, P); (F, F)**
Faire une offre de vente	**Achat, Pas d'achat**
Lancer un dé	**1, 2, 3, 4, 5, 6**
Jouer au foot	**Gagner, Perdre, Match nul**

Le résultat d'une expérience aléatoire s'appelle un **événement élémentaire.** L'ensemble des résultats possibles d'une expérience s'appelle « **univers** (ou **événement fondamental**) » et est noté fondamentalement par Ω. Un élément ω de Ω représente donc un événement élémentaire

Exemples : Déterminer les éléments élémentaires et l'univers des expériences suivantes.

1- On veut sélectionner trois éléments parmi les suivants : A, B, C, D, E, F.

2- On lance deux fois deux pièces de monnaie

3- Lors de la nomination du président et du secrétaire général du conseil d'administration d'une entreprise, cinq personnes, dont deux femmes et trois hommes, se sont présentées. Il est dit que dans les deux postes, les personnes ne doivent pas avoir les mêmes sexes. C'est-à-dire que si le premier poste est occupé par un homme, le second poste serait féminin. Vice versa.

1.2 PERMUTATIONS, ARRANGEMENTS ET COMBINAISONS

On appelle **permutation** de *n* objets chacune des façons de ranger ou d'ordonner **sans répétition** ces *n* objets. Pour en donner un exemple, considérons que l'on veule placer trois hommes au poste de président, vice-président et du secrétaire général du conseil d'administration d'une entreprise quelconque. Ces personnes sont Paul (P), Jean (J) et Sylvain (S). Selon cet exemple, il est impossible qu'une personne occupe deux postes à elle seule. De ce fait, l'ordre dans lequel les postes sont distribués est une permutation. Il existe 6 permutations possibles de ces 3 postes : PJS, PSJ, JPS, JSP, SPJ, SJP. Pour déterminer le nombre de ces différentes permutations, on peut raisonner ainsi : premier poste distribué peut être l'une quelconque des 3 personnes ; le deuxième poste peut être l'une des deux personnes restantes car une personne avait déjà été choisie pour le premier poste ; et le dernier poste est donc pour la dernière personne restante. On obtient ainsi le nombre total de permutations : 3 × 2 × 1 = 6, ce qu'on écrit également 3 ! («trois factorielle »). De façon générale, le même raisonnement montre que, pour n objets, il existe n ! permutations.

n ! représente le produit de tous les entiers positifs de 1 à n[2].

N.B : Par convention, 0 ! est égal à 1.

Exemples :

1- Calculer les valeurs suivantes :

A= 5 ! *(3 !+2 !)

B= $\dfrac{2!-\frac{3!+2!}{5!}}{0!+1!}$

2- Il y a combien de possibilité de donner quatre primes de 10 000 FCFA, de 20 000 FCFA, de 30 000 FCFA et de 40 000 FCFA à quatre travailleurs différents ?

On appelle **arrangement** de n objets pris parmi N, chacun des **groupements ordonnés de n objets choisis sans répétition** parmi les *N*. Prenons un exemple qui consiste à choisir, parmi les trois personnes d'une association (P, J et S), deux personnes au poste de président et de secrétaire général. Les arrangements de deux personnes prises parmi les trois sont : PJ, PS, JP, JS, SP, SJ ; soit 6 arrangements. On peut retrouver ce résultat en raisonnant comme pour les permutations. Pour le premier poste, il y a 3 choix possibles et, pour chacun de ces 3 choix, il y a 2 choix pour le deuxième poste, soit au total 3 × 2 = 6. De façon plus générale, on démontre que le nombre d'arrangements de *n* objets pris parmi N, nombre noté A_N^n, est :

$$A_n^N = \frac{N!}{(N-n)!}$$

N.B : Si N=n, l'arrangement devient une permutation.

[2] $n! = n*(n-1)*(n-2)*(n-3)*\dots\dots*3*2*1$

Exemples :

1- On veut attribuer le rang de la première, deuxième et troisième miss aux 3 des 12 premières miss des 12 départements du Congo. Combien de possibilité avons-nous ?

2- Il y a combien de possibilité de donner deux primes de 10 000 FCFA et de 40 000 FCFA à deux des quatre travailleurs d'une entreprise ?

On appelle **combinaison** de n objets pris parmi N, chacun des **groupements de n objets sans considération de l'ordre dans lequel ils sont rangés ou choisis**. Dans l'exemple de choisir deux personnes parmi les trois (P, J, S) au poste de président et de secrétaire général, on est en fait davantage intéressé par les combinaisons de postes distribués, plutôt que par l'ordre dans lequel les personnes sont affectées. Par conséquent, les combinaisons de deux personnes prises parmi les trois sont : PJ (qui signifie aussi JP), PS (qui signifie aussi SP), et JS (qui signifie aussi SJ); soit 3 combinaisons.

De façon plus générale, le nombre de combinaisons de n objets (sans tenir compte de l'ordre de ces objets) pris dans un ensemble de N objets est noté C_N^n et est donné par la formule :

$$C_n^N = \frac{N!}{n! * (N-n)!} = \frac{A_n^N}{n!}$$

Exemples :

1- Dans une entreprise de dix personnes, on veut choisir quatre personnes qui doivent représenter ladite entreprise lors d'une conférence organisée par le Ministère des Petites et Moyennes Entreprises. Combien de possibilité avons-nous pour faire ce choix ?

2- Lors d'une loterie, on demande à un monsieur de tirer simultanément deux papiers dans une boite contenant six papiers. Combien de cas possibilités a-t-il ?

3- Dans une classe de 20 étudiants (7 femmes et 13 hommes), on veut choisir cinq étudiants pour la représenter au conseil de discipline organisé par l'administration de l'école. Combien de possibilité avons-nous si :

- On ne veut faire ce choix que parmi les femmes ? parmi les hommes ? dans toute la population ?
- On veut deux femmes et trois hommes dans ce groupe de personne qui va représenter la classe.
- On veut deux femmes ou trois hommes dans ce groupe de personne qui va représenter la classe.
- On veut au moins trois hommes.
- On veut au plus trois femmes.

Chapitre 2 : THÉORIE DES PROBABILITÉS

Nous allons voir dans cette section comment déterminer les probabilités des résultats possibles d'une expérience. Les trois approches les plus fréquemment utilisées dans le calcul de probabilité sont la méthode classique, la méthode de la fréquence relative et la méthode subjective. Quel que soit la méthode utilisée, les probabilités doivent satisfaire deux conditions de base.

2.1 CONDITIONS DE BASE POUR DETERMINER DES PROBABILITES

1- La probabilité associée à chaque résultat possible de l'expérience doit être comprise entre 0 et 1.

2- La somme des probabilités de tous les résultats possibles de l'expérience doit être égale à 1. Pour n résultats possibles, on a :

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$$

Exemple :

Parmi les 1000 personnes qui ont accepté d'acheter le produit que la nouvelle entreprise X veut mettre sur pied au prix de 200 FCFA, 194 vivent à Makélékélé, 323 à Bacongo, 258 à Poto-Poto, 64 à Moungali, 129 à Ouenzé et 32 à Talangaï.

Quelle est la probabilité que la société soit installée dans chaque arrondissement ? Dans tous les 6 arrondissements ?

2.2 METHODE CLASSIQUE

Cette méthode de détermination des probabilités est appropriée lorsque les résultats possibles de l'expérience sont **équiprobables**. Si n résultats sont possibles, une probabilité de 1/n est associée à chaque résultat. Cette approche respecte automatiquement les deux conditions de base des probabilités.

Par exemple, entre un homme et une femme, on veut choisir une personne au poste de chef de service. Les deux résultats possibles de l'expérience – homme ou femme – sont équiprobables. Puisque l'un des deux résultats équiprobables est homme, la probabilité de choisir un homme est ½ ou 0,5. De même, la probabilité de choisir une femme est ½ ou 0,5.

Exemples :

1- Déterminer les probabilités de l'expérience suivante : on lance un dé de six face.

2- Dans une boite, on a placé &à papiers contenant chacun les nombres suivants : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

⚠ Quelle est la probabilité de choisir la valeur 2 parmi les nombres pairs ? parmi tous les nombres ?

⚠ Quelle est la probabilité de choisir les nombres 2 et 4 parmi les nombres pairs ? parmi tous les nombres ?

⚠ On tire deux nombres simultanément parmi tous les nombres, quelle est la probabilité que la somme de ces deux nombres donne 10 ? donne un nombre supérieur ou égal à 12 ? donne un nombre impair ?

2.3 METHODE DE LA FREQUENCE RELATIVE

Cette méthode est utilisée quand les données disponibles estiment le nombre de fois où le résultat se produira si l'expérience est répétée un grand nombre de fois.

Considérons l'exemple d'une étude des temps d'attente dans le service de la clientèle d'une banque. Le nombre de client se présentant à ce service entre 9 heures et 12 heures a été collecté pendant 20 jours successifs. Les résultats suivants ont été obtenus :

Nombre de clients	**Nombre de jours au cours desquels le résultat se produit**	
0		**1**
4		**5**
7		**6**
10		**5**
20		**3**
	Total	**20**

Ces données montrent que sur 1 des 20 jours, aucun client ne s'était présenté entre 9 heures et 12 heures durant ces 20 jours ; sur 5 des 20 jours, quatre clients y étaient à ce service entre 9 heures et 12 heures. En appliquant la méthode de fréquence relative, on peut dire que la probabilité pour qu'il y ait aucun client au service de la clientèle entre 9 heures et 12 heures est de 0,05 (1/20). Ceci signifie que la probabilité que quatre clients ou dix clients se présentent au service de la clientèle est la même (0,25=5/20).

Exemple :

Une compagnie d'assurance a remarqué que la plupart des sinistres enregistrés est ceux des accidents de voitures de leurs clients. Et la cause la plus remarquée est que le conducteur était au téléphone. De ce fait, elle a voulue faire une enquête pour connaitre les habitudes d'utilisation du portable des conducteurs dans les quatre ville du Congo à savoir Brazzaville, Pointe-Noire, Owando et Dolisie. La compagnie a obtenu les résultats suivants :

Parliez-vous au téléphone lors de votre accident?		
Régions	**Oui**	**Non**
Brazzaville	**600**	**400**
Pointe-Noire	**300**	**200**
Owando	**25**	**75**
Dolisie	**75**	**25**
Total	**1000**	**700**

1. Pour l'ensemble des quatre régions, quelle est la probabilité qu'un conducteur parle au téléphone lors de son accident ?
2. Quelle est la probabilité qu'un conducteur parle au téléphone dans chaque région ? Dans quelle région, cette probabilité est la plus élevée ?

De manière générale, une formule est souvent utilisée pour calculer les probabilités avec les deux méthodes précédemment définies. La formule est la suivante :

$$Probabilité = \frac{Cas\ favorables}{Cas\ possibles}$$

Exemple :

Dans une entreprise, il y a 50 employés (dont 15 femmes) n'ayant aucun niveau scolaire, 25 (dont 10 femmes) qui ont le niveau primaire, 15 (dont 5 femmes) qui ont le niveau secondaire et 10 (dont deux femmes) qui ont le niveau supérieur. On a besoin de 5 employés pour faire partie du bureau de la mutuelle des travailleurs de ladite entreprise.

1. Quelle est la probabilité de prendre 4 hommes et une femme ?
2. Quelle est la probabilité de prendre 4 hommes ou une femme ?
3. Quelle est la probabilité de prendre un sans niveau, deux « secondaire » et deux « supérieur » ?
4. Quelle est la probabilité de prendre au moins deux femmes ?
5. Quelle est la probabilité de prendre au plus un employé de niveau supérieur ?

2.4 METHODE SUBJECTIVE

Cette méthode est appropriée quand il est irréaliste de supposer que les résultats de l'expérience sont équiprobables et quand peu de données sont disponibles. Lorsque la méthode subjective est utilisée pour assigner des résultats d'une expérience, nous devons utiliser toutes les informations disponibles comme notre expérience ou notre intuition. Après avoir pris en compte toutes les informations disponibles, nous spécifions une probabilité qui traduit notre degré de croyance (sur une échelle allant de 0 à 1) quant à la réalisation du résultat. Puisque les probabilités subjectives traduisent les croyances d'une personne, elles sont personnelles. En utilisant la méthode subjective, il est vraisemblable que différentes personnes associent des probabilités différentes à un même résultat de l'expérience.

Lorsqu'on utilise la méthode subjective pour déterminer les probabilités, une attention particulière doit être apportée aux conditions de base qui stipule que les probabilités de chaque résultat doivent être comprises entre 0 et 1 et que la somme des probabilités de tous les résultats doit être égale à 1.

Considérons l'exemple d'une offre de vente d'un produit laitier sur le marché. Deux réalisations sont possibles :

R_1 = Le produit est accepté

R_2 = Le produit n'est pas accepté

Le chef de service de production pense que la probabilité que le produit soit acceptée est de 0,7 car, selon lui, le produit est très bon (il l'a gouté). Ainsi, pour ce chef de service, $P(R_1)=0,7$ et $P(R_2)=0,3$.

Le chef de service de vente, cependant, croit que la probabilité que ce produit soit accepté est de 0,4 car il est vendu dans un quartier où la majorité des gens ne s'intéressent pas aux produits laitiers ; ils préfèrent plus le manioc, le foufou etc. Par conséquent, pour le chef de service de vente, $P(R_1)=0,4$ et $P(R_2)=0,6$.

Exemple :

Supposons qu'un univers S soit composé de sept éléments : $S=\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7\}$. Les probabilités attribuées à ces éléments de l'échantillon sont les suivantes : P(E1)=0,05 ; P(E2)=00,2 ; P(E3)=0,2 ; P(E4)=0,25 ; P(E5)=0,15 ; P(E6)=0,1 ; P(E7)=0,05. Soient

A={E1,E4,E6} ; B={E2,E4,E7} et C={E2,E3,E5,E7}.

Calculer P(A), P(B), P(C).

Chapitre 3 : CALCUL DES PROBABILITÉS

3.1 COMPLEMENT D'UN EVENEMENT

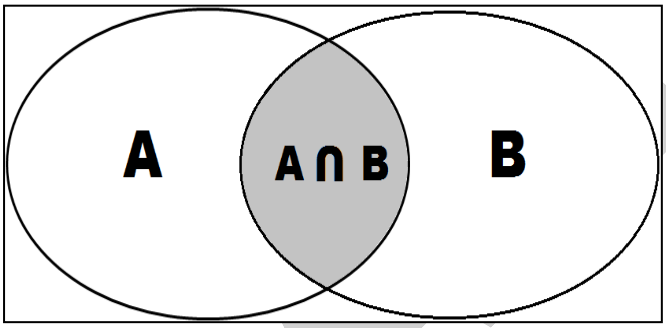
Etant donné un événement A, le complément de A est défini comme étant l'événement composé de tous les résultats qui ne constitue pas A. Il est noté A^c.

Par conséquent : $P(A) + P(A^c) = 1$

3.2 UNION DE DEUX EVENEMENTS INCLUSIFS

L'union de A et B est l'événement qui contient tous les résultats appartenant à A ou B ou les deux. L'union est notée $A \cup B$.

.



La probabilité de l'union de deux événements A et B inclusifs est la suivante :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ou encore,

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Exemple :

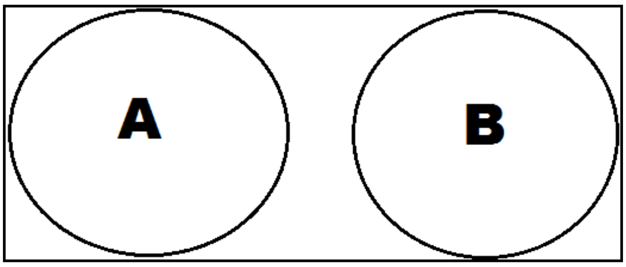
Parmi les 1000 personnes qui ont accepté d'acheter le produit que la nouvelle entreprise X veut mettre sur pied au prix de 200 FCFA, 323 vivent à Makélékélé, 194 à Bacongo, 32 à Poto-Poto, 64 à Moungali et 129 à Ouenzé. Curieusement, il est également constaté que dans les 1000 clients favorables, 100 d'entre eux sont polygames et habitent dans deux endroits : Bacongo et Talangaï.

1. Quelle est la probabilité que la société soit installée à Bacongo ?
2. Quelle est la probabilité que la société ne soit pas installée à Bacongo ?
3. Quelle est la probabilité que la société soit installée à Talangaï ?
4. Quelle est la probabilité que la société s'installe à Talangaï et à Moungali ?
5. Quelle est la probabilité que la société s'installe à Talangaï ou à Moungali ?

3.3 UNION DE DEUX EVENEMENTS MUTUELLEMENT EXCLUSIFS

Deux événements A et B sont mutuellement exclusifs si, lorsqu'un événement se produit, l'autre ne peut pas se produire. Ainsi, une condition pour que A et B soient mutuellement exclusifs est que leur intersection soit vide. C'est-à-dire que $P(A \cap B) = 0$

.



La probabilité de l'union de deux événements A et B mutuellement exclusifs est la suivante :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Exemple :

Supposons qu'un univers S soit composé de sept éléments : S={E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7}. Les probabilités attribuées à ces éléments de l'échantillon sont les suivantes : P(E1)=0,05 ; P(E2)=00,2 ; P(E3)=0,2 ; P(E4)=0,25 ; P(E5)=0,15 ; P(E6)=0,1 ; P(E7)=0,05. Soient

A={E1,E4,E6}

B={E2,E4,E7}

C={E2,E3,E5,E7}

1. Calculer P(A), P(B), P(C).
2. Déterminer AUB et P(AUB).
3. Déterminer A∩B et P(A∩B).
4. Les événements A et C sont-ils mutuellement exclusifs ?
5. Déterminer B^c et $P(B^c)$.

3.4 PROBABILITE CONDITIONNELLE

Souvent, la probabilité d'un événement est influencée par le fait qu'un événement, lié au premier, se soit produit. Considérons un événement A avec une probabilité P(A). Si nous apprenons qu'un événement B, lié à A, s'est déjà produit, nous pouvons tirer parti de cette information pour calculer une nouvelle probabilité de l'événement A. Cette nouvelle probabilité de l'événement A, appelée **probabilité conditionnelle,** est notée P(A/B).

Cette probabilité est calculée de la manière suivante :

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (1)

De même, on peut écrire :

$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ (2)

Ces formules permettent de constater que $P(A \cap B) = P(A/B) * P(B) = P(B/A) * P(A)$ (3)

Exemple :

En 2011, l'entreprise Y a donné des primes à 200 de ses 1000 employés. La répartition de ces primes entre hommes et femmes est détaillée dans le tableau suivant.

	SEXE		
	Hommes	**Femmes**	**Total**
Primes accordés	**150**	**50**	**200**
Primes non accordés	**450**	**350**	**800**
Total	**600**	**400**	**1000**

Soient les événements suivants :

H= « l'employé est un homme »

F= « l'employé est une femme »

P= « l'employé a reçu une prime »

P^c= « l'employé n'a pas reçu une prime »

Calculer $P(H \cap P)$, $P(H \cap P^c)$, $P(F \cap P)$, $P(F \cap P^c)$, $P(H \cup P)$, $P(H \cup F)$, $P(H/P)$, $P(F/P^c)$, $P(P/H)$, $P(P^c/F)$

3.5 EVENEMENTS INDEPENDANTS

Deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un ne dépendant pas de la réalisation de l'autre. De ce fait, si l'on note deux événement A et B indépendants, la probabilité que l'événement A soit réalisé sachant que celui de B a été déjà réalisé donne le même résultat que si l'on calculait juste la probabilité que l'événement A soit réalisé. Autrement dit,

$P(A/B) = P(A)$ (4)

En essayant de faire un lien avec l'équation (1), on constate que **deux événements A et B sont indépendants si :**

$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$ (5)

Exemple :

Supposons que nous ayons deux événements, A et B, avec P(A)=0,8 ; P(B)=0,5 et $P(A \cap B) = 0,4$.

1. Calculer P(A/B) et P(B/A).
2. Calculer $P(A \cap B)$ et P(A)*P(B).
3. Que constatez-vous des réponses de a) et b)?

Chapitre 4 : THÉORÈME DE BAYES

Le théorème de Bayes provient de celui de la probabilité conditionnelle.

Soit une partition de Ω en événement $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ de probabilités strictement positives, $P(A_i) > 0$ pour $1 \leq i \leq n$, et mutuellement exclusifs deux à deux. On suppose que *les probabilités des événements inclus dans chacun des A_i sont connues* et on va donc décomposer un événement quelconque B sur ce système.

On aboutit ainsi à la formule de la probabilité totale :

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i) * P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n}[P(B/A_i) * P(A_i)]}$$

Exemples :

1- Les probabilités à priori des événements A_1 et A_2 sont $P(A_1)=0,4$ et $P(A_2)=0,6$. On sait également que $P(A_1 \cap A_2)=0$. Supposons que $P(B/A_1)=0,2$ et $P(B/A_2)=0,05$.

- ⚠ Les événements A_1 et A_2 sont-ils mutuellement exclusifs ? Pourquoi ?
- ⚠ Calculer $P(A_1 \cap B)$ et $P(A_2 \cap B)$.
- ⚠ Calculer P(B)
- ⚠ Appliquer le théorème de Bayes pour calculer $P(A_1/B)$ et $P(A_2/B)$.

2- Les probabilités à priori des événements E_1, E_2, E_3 sont $P(E_1)=0,2$; $P(E_2)=0,5$ et $P(E_3)=0,3$. De même, les probabilités conditionnelles de l'événement M sachant E_1, E_2, E_3 sont $P(M/E_1)=0,5$; $P(M/E_2)=0,4$ et $P(M/E_3)=0,3$.

- ⚠ Calculer $P(M \cap E_1)$, $P(M \cap E_2)$ et $P(M \cap E_3)$
- ⚠ Calculer P(M)
- ⚠ Appliquer le théorème de Bayes pour calculer $P(E_1/M)$, $P(E_2/M)$ et $P(E_3/M)$.

Chapitre 5 : VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE

Dans la probabilité 1, nous avons défini le concept d'expérience aléatoire et de résultat de l'expérience. Cependant, nous n'avons pas dit ce qui décrit de manière numérique les résultats d'une expérience. C'est la variable aléatoire. Ces variables prennent obligatoirement des valeurs numériques.

En effet, la variable aléatoire associe une valeur numérique à chaque résultat possible de l'expérience. Il existe deux types de variables aléatoire : la variable aléatoire discrète et la variable aléatoire continue.

Dans ce chapitre, nous poursuivons l'étude de probabilité en introduisant les concepts de variables aléatoire discrète. Nous examinerons les concepts de variable aléatoire continue dans le chapitre suivant.

1-1 DEFINITION DE VARIABLE ALEATOIRE DISCRETE

Une variable aléatoire discrète (VAD) est une variable qui peut prendre des entiers naturels finis ou infinis.

Prenons le cas d'une variable aléatoire X qui est le nombre de voiture arrivant au parking d'une entreprise entre 9 heures et 12 heures. Les valeurs possibles de X appartiennent à l'ensemble des entiers naturels. X est donc une VAD.

Il faut noter que tous les résultats des expériences ne sont pas décrits par des valeurs numériques. Considérons par exemple le cas d'une enquête où l'on demande à un individu s'il a suivi à la radio les résultats du rapport sur le chômage publié par le Ministère de l'Emploi et du Travail : soit l'individu accepte qu'il l'a suivi (il répond oui), soit il dit qu'il ne l'a pas suivi (il répond non). Il est possible de décrire ces deux résultats numériquement en définissant la VAD Y de la façon suivante : y=0 s'il répond non et y=1 s'il répond oui. Les valeurs « 0 et 1 » sont arbitraire car une autre aurait du noter y=1 si l'individu répond oui et y=2 s'il répond non. Cependant, du point de vue de la définition d'une VAD, Y est une variable aléatoire car elle fournit des valeurs numériques des résultats de l'expérience.

1-2 DISTRIBUTION DE PROBABILITE DISCRETE

La distribution de probabilité d'une variable aléatoire décrit comment sont distribuées les probabilités en fonction de valeur de la variable aléatoire. Pour une VAD X, la distribution de probabilité est définie par une **fonction de probabilité** (ou **fonction de distribution**) notée $f(x)$ telle que :

$$P(X = x) = f(x)$$

La probabilité de toutes les réalisations strictement inférieures au réel x est appelée **fonction de répartition.** C'est en quelque sorte le cumul de la fonction de distribution. Elle est notée $F(x)$.

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{i=1}^{x-1}[f(i)]$$

N.B : Les conditions requises pour une fonction de probabilité discrète sont :

a) $f(x) \geq 0$

b) $\sum f(x) = 1$

Exemple :

La distribution de probabilité de variable aléatoire X est donnée dans le tableau ci-dessous.

x	**f(x)**
20	**0,2**
25	**0,15**
30	**0,25**
35	**0,4**
Total	**1**

a) Est-ce une véritable distribution de probabilité ? Pourquoi ?
b) Quelle est la probabilité que x soit égal à 30 ?
c) Quelle est la probabilité que x soit inférieur ou égal à 25 ?
d) Quelle est la probabilité que x soit supérieur à 30 ?
e) Déterminer la fonction de répartition de la variable X.
f) Faire un graphique de la fonction de distribution et de la fonction de répartition.

1-3 ESPERANCE MATHEMATIQUE ET VARIANCE D'UNE VARIABLE ALEATOIRE DISCRETE

On appelle l'**espérance mathématique** de la variable aléatoire discrète X, si elle existe :

$$E(x) = \sum xf(x)$$

Propriétés : Soient deux réels a et b ;

1- $E(X + a) = E(X) + a$
2- $E(aX) = aE(X)$
3- $E(aX - bY) = aE(X) - bE(Y)$

Alors que l'espérance mathématique fournit la valeur moyenne de la variable aléatoire, on a souvent besoin d'une mesure de dispersion ou de variabilité. Pour cela, on calcule la variance. On appelle la **variance** de la variable aléatoire discrète X, si elle existe :

$$Var(x) = \sigma^2 = \sum[(x - E(X))^2 * f(x)]$$

Il est remarqué que le calcul de la variance dépend de celui de l'espérance mathématique.

De même, en dehors de la variance, on peut calculer l'écart-type pour mesurer la dispersion. L'**écart-type** est la racine carrée de la variance. Il est noté σ.

$$\sigma = \sqrt{Var(x)}$$

<u>Propriétés</u> : Soient deux réels a et b ;

1- $Var(X + a) = Var(X)$
2- $Var(aX) = a^2 Var(X)$
3- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
Avec $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X) * E(Y)$
Et si X et Y sont indépendants, $Cov(X, Y) = 0$

On appelle **moment non centré d'ordre $\boldsymbol{r}$** $\in \mathbb{N}^*$ la quantité, lorsqu'elle existe :

$$m_r(X) = E(X^r) = \sum[x^r * f(x^r)]$$

Le **moment centré d'ordre $\boldsymbol{r}$** $\in \mathbb{N}^*$ est :

$$\mu_r(X) = \sum[(x - E(X))^r * f(x))]$$

Exemple :

On donne le tableau suivant :

x	y	f(x)	f(y)
20	10	0,2	0,4
25	30	0,15	0,1
30	50	0,25	0,3
35	70	0,4	0,2
Total		1	1

a) Calculer E(X), Var(X), l'écart-type (X), $m_2(X)$ et $\mu_2(X)$
b) Calculer E(Y), Var(Y), l'écart-type (Y), $m_2(Y)$ et $\mu_2(Y)$
c) Calculer E(X-3), E(3X+2), Var(3X+5), E(3X-5Y), Var(2Y+3)
d) Calculer Cov(X,Y) et Var(X+Y)

1-4 LOIS USUELLES DISCRETES

Loi de Bernoulli

C'est la loi d'une variable aléatoire X qui ne peut prendre que deux valeurs, 1 avec la probabilité p et 0 avec la probabilité 1-p notée q.

On dit X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, ce qu'on écrit $X \sim \mathcal{B}(1, p)$, de moments **E(X)=p** et de variance **Var(X)=pq**.

La somme n variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi de Bernoulli de paramètre p donne une autre loi appelée loi binomiale.

Loi binomiale

L'intérêt d'une expérience binomiale est de connaitre le nombre de succès intervenant au cours de n tirages. On effectue n épreuves successives indépendantes où on observe à chaque fois la réalisation ou non d'un événement A, et on note le nombre X de réalisations de A. de ce fait, on définit une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètre n et p=P(A), caractérisée par $X(\Omega) = \{0,1, \dots, n\}$ et pour $k \in X(\Omega)$, par :

$$P(X = k) = C_k^n p^k (1 - p)^{n-k}$$

On écrit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec **E(X)=np**, **Var(X)=npq** et q=1-p.

Propriétés :

1- L'expérience est une série de n tirages identiques.
2- Deux événements sont possibles à chaque tirage. L'un est dit succès et l'autre est dit échec.
3- La probabilité de succès, notée p, ne se modifie pas d'un tirage à l'autre. Par conséquent, la probabilité d'échec, notée 1-p, ne se modifie pas non plus.
4- Les tirages sont indépendants.

N.B : Si $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$, alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

Exercices :

1- On lance 4 fois un dé de six faces numérotées de 1 à 6. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois la face numérotée 1 ?
2- On 20 % des familles de la ville de Brazzaville possèdent un poste de télévision couleur. Quelle est la probabilité de trouver dans un échantillon de taille 30

a) Aucune famille possédant un poste couleur ?
b) Au moins une famille possédant un poste couleur ?
c) Une seule famille possédant un poste couleur ?
d) Au plus une famille possédant un poste couleur ?

3- On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie. Quelle est la probabilit2 d4obtenir le côté face un nombre de fois :

a) Inférieur ou égal à 5 ?
b) Inférieur ou égal à 4 ?
c) Egal à 5 ?

4- Un ensemble Ω est composé de deux jetons verts et de trois jetons rouges : $\Omega = \{V_1, V_2, R_1, R_2, R_3\}$.

Soit X le caractère, défini sur Ω, qui, à tout jeton de Ω associe : le nombre 1 si le jeton est vert, le nombre 0 si le jeton est rouge.

a) Quelle sont les valeurs de P(X=1), P(=0), E(X) et Var(X) ?

b) La variable aléatoire X suit quelle loi ?

c) On note X_1,X_2 et X_3 trois variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre2/5.

d) On pose : $Y_i = \sum_{k=1}^{i} X_k$

e) Trouver les lois de Y_1,Y_2, Y_3 et de $Z=Y_2+Y_3$

f) Calculer les espérances mathématiques et les variances de ces variables aléatoires.

Loi hypergéométrique

La loi hypergéométrique est étroitement liée à la loi binomiale. La différence majeure entre ces deux lois est que, lorsqu'il s'agit d'une loi hypergéométrique, les tirages ne sont pas indépendants, et la probabilité de succès change d'un tirage à l'autre.

On parle de la loi hypergéométrique lorsqu'on est dans un cas où on effectue n tirages sans remise dans une boite contenant N objets. Dans cette boite, on a les objets de la famille A et d'autres objets ; le fait de tirer un objet de la famille A constitue un succès et le contraire est un échec. Soit NA le nombre d'objets de la famille A; ce qui signifie qu'il y a N-NA objets se trouvant dans la boite et ne faisant pas partie de la famille A.

On veut connaitre la probabilité de tirer k objets appartenant à la famille A, avec $k \leq NA$. Cette probabilité est :

$$P(X = k) = f(k) = \frac{C_k^{N_A} * C_{n-k}^{N-N_A}}{C_n^N}$$

L'espérance mathématique de cette loi est :

$$E(X) = \frac{n * N_A}{N}$$

Et la variance est :

$$Var(X) = E(X) * \left(1 - \frac{N_A}{N}\right) * (\frac{N-n}{N-1})$$

Exercices :

1- Dans une urne de 10 boules dont 4 sont vertes, on tire sans remise 7 boules. Quelle est la probabilité d'extraire dans cette urne 2 boules vertes parmi les 7 ?

2- Dans une étude menée par la compagnie MTN Congo, la question suivante était posée aux personnes interrogées : « Utilisez-vous le réseau MTN quand vous voudrez appeler à l'étranger ? ». la réponse à la question est soit « Oui » ou « Non ». Supposons que dans un groupe de 10 individus, 7 ont répondu par Oui et les 3 autres par Non.

a) Quelle est la probabilité qu'exactement deux individus répondent par Oui.

b) Quelle est la probabilité que 2 ou 3 individus répondent par Oui.

3- La boulangerie « Mama Libala Essili » produit des pains dans deux arrondissements de Brazzaville, l'un à Bacongo et l'autre à Talangaï. L'usine de Talangaï emploie 40 personnes, l'usine de Bacongo emploie 20 personnes. On n'a demandé à un échantillon aléatoire de 10 employés de répondre à un questionnaire. Quelle est la probabilité :

a) Qu'aucun employé sélectionné ne travaille à Talangaï.

b) Qu'un seul employé sélectionné travaille à Hawaï.

c) Qu'au moins deux employés sélectionnés travail à Talangaï.

Loi de poisson

On utilise la distribution de probabilité de poisson pour modéliser les taux d'arrivée ou des intervalles temporels. Sa fonction de distribution est :

$$P(X = x) = f(x) = \frac{\mu^x * e^{-\mu}}{x!}$$

Où μ est l'espérance mathématique ou le nombre moyen d'occurrences dans un intervalle.

Dans la loi de poisson, $\boldsymbol{E(X) = Var(X) = \mu}$.

<u>**Exemples**</u> :

1- On admet que le nombre de défauts X sur le verre d'une ampoule de télévision obéit à une loi de poisson, de paramètre λ=4.

Calculer la probabilité des événements suivants :

a) Il n'y a aucun défaut sur l'ampoule ;

b) Il y a plus de deux défauts sur l'ampoule ;

c) Le nombre des défauts est compris entre 3 et 7 (bornes incluses).

2- De 1990 à 2010, en moyenne 18 accidents d'avion ont coûté la vie à au moins un passager. Calculer :

a) Le nombre moyen d'accident d'avion par mois.

b) La probabilité qu'aucun accident ne se produise au cours d'un mois.

c) La probabilité qu'exactement un accident se produise au cours d'un mois.

d) La probabilité que plus d'un accident se produise au cours d'un mois.

3- Les arrivées de clients dans une banque sont aléatoires et indépendantes. La probabilité d'une arrivée en une minute est la même que la probabilité d'une arrivée en une autre minute. Supposons un taux d'arrivée moyen de trois clients par minutes.

a) Quelle est la probabilité d'exactement trois arrivée en une minute ?

b) Quelle est la probabilité d'au moins trois arrivées en une minute.

Chapitre 6 : VARIABLE ALÉATOIRE CONTINUE

Dans le chapitre précédent, nous avons traité des variables aléatoires discrètes et de leurs distributions de probabilité. Dans ce chapitre, nous étudierons cinq distributions de probabilités continues : la loi uniforme, la loi exponentielle, la loi normale, la loi de Khi-deux, la loi de Student et la loi de Fisher.

Les variables aléatoires discrètes (VAD) et les variables aléatoires continues (VAC) se différencient par le calcul de probabilité. Pour une VAD, la fonction de probabilité $f(x)$ fournit la probabilité que la variable aléatoire prenne une valeur particulière. Cependant, pour une VAC, ***la fonction de densité de probabilité,*** également notée $f(x)$ est l'équivalent de la fonction de probabilité. Contrairement à la fonction de probabilité d'une VAD, la fonction de densité de probabilité des VAC ne donne pas directement des valeurs (des probabilités). Elle donne plutôt l'intégrale comprise entre deux valeurs constituant un intervalle. De ce fait, quand on calcule des probabilités d'une VAC, on calcule la probabilité que la variable aléatoire prenne n'importe quelle valeur dans un intervalle particulier.

2.1 MOMENTS D'UNE VARIABLE ALEATOIRE ABSOLUMENT CONTINUE

Espérance mathématique

Elle est définie par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Il faut noter que si X est une VAC,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Lorsque $E(x)$ existe. pour tout réel a :

$E(x + a) = E(x) + a$

Et

$$E(ax) = aE(x)$$

Si deux variables aléatoires X et Y admettent des espérances mathématiques,

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Variance

Elle est définie par :

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x)dx = E(X^2) - [E^2(X)] = \sigma^2$$

Lorsque cette intégrale généralisée existe. Pour tout réel a :

$Var(X + a) = Var(x)$ et $Var(aX) = a^2 Var(x)$

Si deux variables aléatoires X et Y admettent des espérances mathématiques,

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Moments non centrés et centrés

Le moment non centré d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ de X est la quantité, lorsqu'elle existe :

$$m_r(X) = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)dx$$

Le moment centré d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ de X est la quantité, lorsqu'elle existe :

$$\mu_r(X) = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^r f(x)dx$$

Exemples :

1- Trouver les dérivées des fonctions suivantes : A(x)=1/2*x3+3x4-5 x2+ x +4, B(x)=(x -1)/x, D(x)= x 2/(x +3), E(x)=lnx, F(x)=(x-lnx)/(x+lnx), G(x)=e(x +3), H(x)=(x -ex)/(x+1) et K(x)=x2*e(1-x2).
2- Trouver les primitives des fonctions suivantes : A(x)=2-3x4+3x5+x, B(x)=3/x, C(x)=x/(x-1), D(x)=x2/(x+1), E(x)=(1-x)/x2, F(x)=e|x-a|, G(x)=lnx, H(x)=e-(x-a) et K(x)=1/a*x(1-1/a).
3- Trouver les espérances mathématiques, les variances, les moments simples d'ordres 1, 2, 3 et les moments centrés d'ordres 1, 2 et 3 des fonctions suivantes : f(x)=|x-1|+2 (-1 et 2), g(x)=2x/a2 (0 et a) et h(x)=e-(x-a) (>a)

2.2 LOIS USUELLES CONTINUES

Loi uniforme

Considérons la variable aléatoire X qui représente la durée la durée du vol en avion entre Brazzaville et Pointe-Noire. Supposons que la durée du vol soit comprise entre 40 et 50 minutes. Puisque la variable aléatoire X peut prendre n'importe quelle valeur dans cet intervalle de 40 à 50 minutes, , X est donc une VAC et non pas une VAD. Supposons que les données actuelles de la durée du vol nous permettent de conclure que la probabilité que la durée du viol appartienne à un intervalle, d'une minute compris entre 40 et 50 minutes, est la même que la probabilité que la durée du viol appartienne à un autre intervalle d'une minute compris entre 40 et 50 minutes. Puisque tous les intervalles d'une minute, compris entre 40 et 50 minutes, sont équiprobables, on dit que la variable aléatoire X suit une **loi uniforme**. La fonction de densité de probabilité qui définit la loi uniforme de la VAC X correspond :

$$f(x) = \begin{cases} 1/10 & si\ 40 \leq x \leq 50 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

De manière générale, la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire qui suit une loi uniforme dans l'intervalle de [a, b] est :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ a \leq x \leq b \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Cette loi admet pour moment :

$E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $Var(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$

N.B : Si X suit une loi uniforme dans l'intervalle de [a, b], alors

$P(l \leq x \leq m) = \frac{(m-l)}{b-a}$ et P(x=m)=0.

Exemples :

1- La variable aléatoire X est uniformément distribuée entre 1 et 1,5.

a) Représenter graphiquement la fonction de densité de probabilité.
b) Calculer P(x=1,25).
c) Calculer P(1<=x<=1,25).
d) Calculer P(1,2<x<1,5).

2- La plupart de langages informatiques ont une fonction qui génère des nombres aléatoires. La fonction RAND d'Excel peut être utilisée pour générer des nombres aléatoires entre 0 et 1. Soit X une VAC générée par la fonction RAND, dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Loi exponentielle

La **loi exponentielle** peut être utilisée pour décrire des variables aléatoires telles que le temps entre les arrivées des voitures à une station, le temps nécessaire pour charger un camion, le temps qu'une personne peut faire dans une entreprise pour monter des échelons. La fonction de densité de probabilité qui définit la loi exponentielle de paramètre $\theta \geq 0$ de la VAC X s'écrit :

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Cette loi admet pour moment :

$E(X) = \frac{1}{\theta}$ et $Var(X) = \frac{1}{\theta^2}$

N.B : Si X suit une loi exponentielle de paramètre θ, alors

$P(x \leq m) = 1 - e^{-m\theta}$ et $P(l \leq x \leq m) = P(x \leq m) - P(x \leq l)$.

Exemples :

1- Considérons la fonction de densité de probabilité exponentielle suivante :

$f(x) = \frac{1}{8}e^{-x/8}$ pour x>=0

a) Trouver P(x<=6).

b) Trouver P(x<=4).

c) Trouver P(x>=6).

d) Trouver P(4<=x<=6).

2- Dans une entreprise, on interroge le personnel sur la performance du modem du réseau Warid. Il ressort du résultat de cette enquête que le temps moyen de téléchargement d'un fichier pdf est d'environ 20 secondes. Supposons que le temps de téléchargement suit une loi exponentielle.

a) Quelle est la probabilité que le temps de téléchargement d'un fichier pdf soit inférieur à 10 secondes ?

b) Quelle est la probabilité que le temps de téléchargement d'un fichier pdf soit supérieur à 30 secondes ?

c) Quelle est la probabilité que le temps de téléchargement d'un fichier pdf soit compris entre 10 et 30 secondes ?

Loi normale

La loi la plus importante pour décrire une VAC est la **loi normale.** Cette loi a été utilisée dans de nombreuses applications pratiques, dans lesquelles les variables aléatoires étaient la taille et le poids d'individus, les résultats des tests d'intelligences, des mesures scientifiques, des niveaux de précipitations, etc. Elle est aussi beaucoup utilisée dans le domaine de l'inférence statistique. Dans de telles applications, la loi normale fournit une description des résultats possibles grâce à un échantillon.

La fonction de densité de la loi normale est

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Où

μ correspond à la moyenne

σ correspond à l'écart-type

$\pi \cong 3{,}14159$

$e \cong 2{,}71828$

Quand une variable aléatoire X suit une loi normale, on note que $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$ et on lit X suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ. Dans ce cas, $E(X) = \mu$ et $Var(X) = \sigma^2$

N.B :

1- La loi normale a deux paramètres savoir μ et σ. Notons aussi qu'une variable qui a une distribution de densité normale de moyenne nulle et d'écart-type 1, suit ce que l'on appelle une **loi normale centrée réduite**.

La fonction de densité de la loi précédemment définie est :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Dans ce cas, on écrit que $X \rightsquigarrow N(0,1)$

Propriétés

1- Si $X \rightsquigarrow N(m, \sigma)$, alors la variable aléatoire $Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}} = \frac{X-m}{\sigma} \rightsquigarrow N(0,1)$. C'est ce qu'on appelle par le théorème « central limit »

De ce fait, il est démontré que si $X \rightsquigarrow N(m, \sigma)$ et que $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, alors

$E(\bar{X}) = m$ et que $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$. En appliquant le théorème central limit, on accepte que

$$\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{Var(\bar{X})}} = \frac{X - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

2- Si $X \rightsquigarrow N(0,1)$, alors $P(X \leq t) = \pi(t)$ est appelée **fonction intégrale** de la loi $N(0,1)$. Ainsi, il est vérifié que $\pi(-t) = 1 - \pi(t)$ et que $P(X \leq -t) = P(X \geq t)$.

3- Si $X \rightsquigarrow N(0,1)$, alors $P(s \leq X \leq t) = \pi(t) - \pi(s)$

4- Si $X_1 \rightsquigarrow N(\mu_1, \sigma_2)$ et $X_2 \rightsquigarrow N(\mu_2, \sigma_2)$ sont des variables léatoires indépendantes, alors :

$$X_1 + X_2 \rightsquigarrow N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2})$$

5- Si $X \rightsquigarrow N(0,1)$, alors X^2 suit une autre loi appelée la **loi de Khi-deux** à un degré de liberté. Et on note que $X \rightsquigarrow \chi_1^2$.

De plus, si $X_1 \rightsquigarrow \chi_1^2, X_2 \rightsquigarrow \chi_1^2, \ldots, X_n \rightsquigarrow \chi_1^2$ et qu'elles sont toutes indépendantes, alors $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \rightsquigarrow \chi_n^2$. Et on dit que Z suit une loi de Khi-deux à n degrés de liberté. Dans ce cas, E(Z)=n et Var(Z)=2n.

6- Si $X \rightsquigarrow N(0,1)$ et $Y \rightsquigarrow \chi_n^2$, alors $Z = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ suit une autre loi appelée la **loi de Student** à n degrés de liberté. Et on note que $Z \rightsquigarrow T_n$. Dans ce cas, E(Z)=0 et Var(Z)=n/(n-2) pour n>2.

7- Soit X et Y deux VAC de lois respectives χ_n^2 et χ_m^2, alors le rapport $\frac{X/n}{Y/m}$ suit une

loi de Fisher-Snedecor de n et m degrés de liberté, notée F(n, m).

Exemples :

1- Une variable aléatoire X suit une loi de Gauss de moyenne 5 et de variance9. Calculer les probabilités des événements suivants :

a) X inférieur à 8.

b) X supérieur à 2.

c) X compris entre -1 et 11.

d) X extérieur de l'intervalle [-4, 14].

2- Dans l'entreprise de Saris Congo, on qualifie de sucre pur si son paquet pèse entre 900 et 1100g. Le chef de service de production vérifie 200 paquets de sucre et trouve que le poids moyen du sucre est 465g avec un écart-type de 10g.

Sachant que le sucre est distribué normalement, calculer le pourcentage de la production du sucre qui ne doit pas porter la mention « sucre pur », en considérant l'échantillon comme significatif de la production générale.

3- Dans un pays, le montant moyen dépensé par les parents pour la rentrée des classes de leurs enfants en 2011 s'élevait à 90 000 FCFA. Supposons que l'écart-type soit de 100 FCFA et que le montant des dépenses soit normalement distribué.

a) Quelle est la probabilité que les dépenses pour un enfant pris par hasard soient supérieures à 100 000 FCFA ?

b) Quelle est la probabilité que les dépenses pour un enfant pris par hasard soient inférieures à 89 600 FCFA ?

c) Quelle est la probabilité que les dépenses pour un enfant pris par hasard soient comprises entre 89 600 FCFA et 100 000 FCFA?

4- Soit une variable aléatoire normale X telle que :

$$P(X \geq 3) = 0{,}8413$$

Et

$$P(X \geq 9) = 0{,}0228$$

Déterminer la moyenne et l'écart-type de cette loi.

5- En janvier 2003, un salarié américain passait en moyenne 77 heures à naviguer sur internet pendant ses heures de travail (CNCB, 15 mars 2003). Supposez que les temps de connexion à Internet soient normalement distribués et l'écart-type égal à 20 heures.

a) Quelle est la probabilité qu'un salarié sélectionné aléatoirement passe moins de 50 heures à naviguer sur Internet ?
b) Quel pourcentage de salariés passe plus de 100 heures sur Internet.
c) Une personne est considérée comme un utilisateur important si elle se situe parmi les 20 % se servant le plus de l'Internet. Combien d'heures une personne doit-elle passer sur Internet pour être considérée comme un utilisateur important.

95, rue Malanda (Moukondo vers la Tsiémé, Ouenzé)

VOUS POUVEZ AUSSI APPELER OU ECRIRE A L'AUTEUR DE CE DOCUMENT.
E-mail : bardinbahouayila@yahoo.fr / bardinbahouayila@gmail.com
Tel : 05 075 33 71 / 06 837 81 85